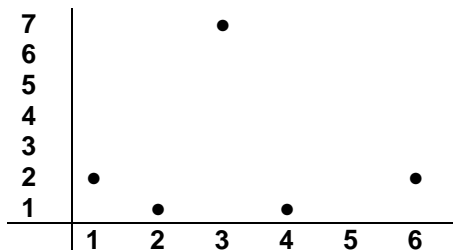
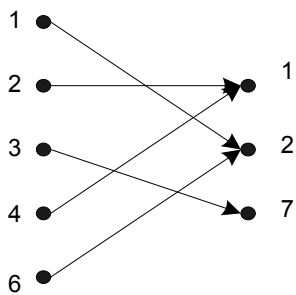


**Aufgabe 11.1**

- (i) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Menge der natürlichen Zahlen abzählbar ist. Da die Menge der natürlichen, durch 3 teilbaren Zahlen eine Teilmenge dieser Menge ist, muss sie auch abzählbar sein.
- (ii) Da die Menge der rationalen Zahlen nach Cantor abzählbar ist, ist auch  $a \in \mathbb{Q}$  abzählbar. Da auch  $b \in \mathbb{Q}$  ist das Produkt  $i \cdot b$  ebenfalls abzählbar, da  $(i \cdot b) \in \mathbb{Q}$ . Folglich ist auch die Summe  $(a + b \cdot i) \in \mathbb{Q}$  abzählbar.
- (iii) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Menge der reellen Zahlen im Intervall  $[0,1]$  überabzählbar ist. Da die Menge der reellen Zahlen im Intervall  $[0, \frac{1}{7}]$  eine Teilmenge dieser Menge ist, muss sie auch überabzählbar sein.

**Aufgabe 11.2**

- (i)  $R = \{(1,2)(2,1)(3,7)(4,1)(6,2)\}$



- (ii) Die Relation  $R$  ist eine Funktion, da sie rechteindeutig und linkstotal ist.
- (iii) Die Relation  $R$  ist keine Funktion von  $\{1, \dots, 6\}$  nach  $\{1, \dots, 7\}$ , da sie dann nicht linkstotal ist (5 fehlt).
- (iv) Die Relation  $R^{-1}$  ist keine Funktion, da sie nicht rechtseindeutig ist (wegen  $(1,2), (1,4), (2,1), (2,6)$ ).

## Aufgabe 11.3

(i)  $G = \{(x, y) \in M \times M \mid x \text{ ist Bruder von } y \text{ oder } x = y\}$

- (a) Um eine Äquivalenzrelation zu sein, muss die Relation reflexiv, symmetrisch und transitiv sein

Reflexivität:  $G$  ist reflexiv, da  $x = y$  enthalten ist und somit  $\forall x \in M : G(x, x)$ Symmetrie:  $G$  ist symmetrisch, da wenn  $x$  Bruder/Schwester von  $y$  ist auch  $y$  Bruder/Schwester von  $x$  ist, also

$$\forall x, y \in M : (G(x, y) \Rightarrow G(y, x))$$

Transitivität:  $G$  ist transitiv, da wenn  $x$  Bruder/Schwester von  $y$  ist und  $y$  Bruder/Schwester von  $z$ , ist auch  $x$  Bruder/Schwester von  $z$ 

$$\forall x, y, z \in M : (G(x, y) \text{ und } G(y, z) \Rightarrow G(x, z))$$

Also ist  $G$  eine Äquivalenzrelation.

- (b) Um eine Halbordnung zu sein, muss die Relation reflexiv, antisymmetrisch und transitiv sein

Antisymmetrie:  $G$  ist nicht antisymmetrisch, da aus  $x$  Bruder/Schwester von  $y$  und  $y$  Bruder/Schwester von  $x$  nicht folgt, dass  $x$  und  $y$  die gleiche Person sind.

$$\forall x, y \in M : (G(x, y) \text{ und } G(y, x) \not\Rightarrow x = y)$$

Also ist  $G$  keine Halbordnung.

- (c) Da
- $G$
- schon keine Halbordnung ist, ist es auch keine Ordnung.

(ii)  $A = \{(x, y) \in M \times M \mid x \text{ ist Vorfahr } y \text{ oder } x = y\}$

- (a) Um eine Äquivalenzrelation zu sein, muss die Relation reflexiv, symmetrisch und transitiv sein

Reflexivität:  $A$  ist reflexiv, da  $x = y$  enthalten ist und somit  $\forall x \in M : A(x, x)$ Symmetrie:  $A$  ist nicht symmetrisch, da wenn  $x$  Vorfahr von  $y$  ist, kann nicht auch  $y$  Vorfahr von  $x$  sein, also  $\forall x, y \in M : (A(x, y) \not\Rightarrow A(y, x))$ Also ist  $A$  keine Äquivalenzrelation.

- (b) Um eine Halbordnung zu sein, muss die Relation reflexiv, antisymmetrisch und transitiv sein

Antisymmetrie:  $A$  ist antisymmetrisch, da wenn  $x$  Vorfahr von  $y$  ist und  $y$  Vorfahr von  $x$  ist, folgt, dass  $x$  und  $y$  die gleiche Person sein müssen (wegen  $x = y$  in der Relation)

$$\forall x, y \in M : (A(x, y) \text{ und } A(y, x) \Rightarrow x = y)$$

Also ist  $A$  eine Halbordnung.

- (c) Um eine Ordnung zu sein, muss die Relation zusätzlich zu den Eigenschaften der Halbordnung noch total sein

Totalität:  $A$  ist total, da entweder  $x$  Vorfahr von  $y$  ist oder  $y$  Vorfahr von  $x$ 

$$\forall x, y \in M : (A(x, y) \vee A(y, x))$$

- (iii)  $N = \{(x, y) \in M \times M \mid x \text{ ist Nachbar von } y\}$
- (a) Um eine Äquivalenzrelation zu sein, muss die Relation reflexiv, symmetrisch und transitiv sein  
 Reflexivität:  $N$  ist nicht reflexiv, da man nicht sein eigener Nachbar sein kann (es sei denn man steht extrem neben sich)  
 $N$  ist also keine Äquivalenzrelation.
- (b) Um eine Halbordnung zu sein, muss die Relation reflexiv, antisymmetrisch und transitiv sein  
 Da  $N$  schon nicht reflexiv ist, ist es auch keine Halbordnung.
- (c) Da  $N$  schon keine Halbordnung ist, ist es auch keine Ordnung.
- (iv)  $V = \{(x, y) \in M \times M \mid y \text{ ist Mutter von } x\}$
- (a) Damit eine Relation eine Funktion ist, muss sie linkstotal und rechtseindeutig sein.  
 $V$  ist linkstotal (denn jedes Kind hat eine Mutter) und rechtseindeutig (denn jedes Kind hat nur genau eine Mutter), somit ist  $V$  eine Funktion. (Diverse neue Möglichkeiten der Gentechnik lassen wir dabei mal außer Acht.)
- (b)  $V^{-1} = \{(y, x) \in M \times M \mid y \text{ ist Mutter von } x\}$   
 $V^{-1}$  ist nicht rechtseindeutig, da eine Mutter mehrere Kinder haben kann. Somit ist  $V^{-1}$  keine Funktion.
- (v)  $T = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x - y \in \mathbb{Z}\}$
- (a) Um eine Äquivalenzrelation zu sein, muss die Relation reflexiv, symmetrisch und transitiv sein  
 Reflexivität:  $T$  ist reflexiv, da  $x - x = 0 \in \mathbb{Z}$   
 Symmetrie:  $T$  ist symmetrisch, da  $x - y = -(y - x) \in \mathbb{Z}$ , falls  $x - y \in \mathbb{Z}$   
 Transitivität:  $T$  ist transitiv: sind  $x, y, z \in \mathbb{Z}$  ist  $T$  in jedem Fall transitiv; enthält  $y$  Nachkommastellen, müssen diese bei der Subtraktion von  $x$  wegfallen, da sonst nicht mehr gilt  $x - y \in \mathbb{Z}$ . Enthält  $y$  aber Nachkommastellen, so muss auch  $z$  diese entfernen, damit gilt  $y - z \in \mathbb{Z}$ .  
 $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (T(x, y) \text{ und } T(y, z) \Rightarrow T(x, z))$   
 Also ist  $T$  eine Äquivalenzrelation.
- (b) Um eine Halbordnung zu sein, muss die Relation reflexiv, antisymmetrisch und transitiv sein  
 Antisymmetrie:  $T$  ist nicht antisymmetrisch, da beispielsweise für  $x = 3, y = 4$  gilt  $x, y \in \mathbb{Z}$  und somit auch  $((x - y) \wedge (y - x)) \in \mathbb{Z}$  aber nicht gilt  $x = y$ .  
 $\forall x, y \in M : (T(x, y) \text{ und } T(y, x) \not\Rightarrow x = y)$   
 Also ist  $T$  keine Halbordnung.
- (c) Da  $T$  schon keine Halbordnung ist, ist es auch keine Ordnung.

(vi) 
$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x + y \in \mathbb{Z}\}$$

(a) Um eine Äquivalenzrelation zu sein, muss die Relation reflexiv, symmetrisch und transitiv sein

Reflexivität:  $P$  ist nicht reflexiv, da z.B.  $0, 2 + 0, 2 = 0, 4 \notin \mathbb{Z}$  aber

$$\exists (x, y) \in P \mid (x + y) \in \mathbb{Z} \wedge x = 0, 2$$

Also ist  $P$  eine Äquivalenzrelation.

(b) Um eine Halbordnung zu sein, muss die Relation reflexiv, antisymmetrisch und transitiv sein

Da  $P$  schon nicht reflexiv ist, ist es auch keine Halbordnung.(c) Da  $P$  schon keine Halbordnung ist, ist es auch keine Ordnung.**Aufgabe 11.4**

(i) 
$$c: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, x \rightarrow x^3$$

Injektiv, da  $\forall x, x' \in \mathbb{N} \mid x \neq x' : c(x) \neq c(x')$  (lässt sich auch am Graphen zeigen, da die Funktion streng monoton steigend ist)Nicht surjektiv, da z.B.  $x^3 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2} \notin \mathbb{N}$ 

(ii) 
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow x^3$$

Injektiv, da  $\forall x, x' \in \mathbb{N} \mid x \neq x' : c(x) \neq c(x')$  (lässt sich auch am Graphen zeigen, da die Funktion streng monoton steigend ist)Surjektiv, da  $x^3 = y \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y}$  nur eine Lösung hat

(iii) 
$$m: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_{42}, x \rightarrow x \bmod 42$$

Nicht injektiv, da sich alle  $x \in \mathbb{Z}$  modulo 41 darstellen lassenNicht surjektiv, da z.B.  $m(0) \equiv m(42) \equiv 0 \bmod 41$ 

(iv) 
$$w: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow x(x+1)(x-1) = x^3 - x$$

Nicht injektiv, da  $w(0) = 0$  und  $w(1) = 0$ Nicht surjektiv, da nicht alle negativen Werte aus  $\mathbb{R}$  Lösung sind(v) Surjektiv, da jedes Inverse aus  $\mathbb{Z}_{13}^{\times}$  auch Rest der Division einer Zahl aus  $\mathbb{Z}$  durch 13 ist.Nicht Injektiv, da mehrere Elemente aus  $\mathbb{Z}$  kongruent zu einem Element aus  $\mathbb{Z}_{13}^{\times}$  sind.**Aufgabe 11.5**Im ersten Zug ziehe man eine Kugel  $K_1$  mit der Farbe  $F_1$ .Nun ziehe man die 2. Kugel  $K_2$ . Diese kann wieder die Farbe  $F_1$  haben, oder die Farbe  $F_2$ .

Im ersten Fall hat man bereits zwei Kugeln identischer Farbe gezogen. Im zweiten Fall, muss man ein drittes Mal ziehen.

Beim dritten Zug zieht man nun die Kugel  $K_3$ , die entweder die Farbe  $F_1$  oder die Farbe  $F_2$  hat. Da man nun bereits beide in der Urne existierenden Farben bereits gezogen hat, hat man spätestens jetzt eine Farbe zweimal gezogen.

Also muss man 3 Kugeln ziehen um sicher zu sein, in jedem Fall zwei unterschiedlich farbige gezogen zu haben.