

## Übungen zur Vorlesung

**Modellierung**

WS 2003/2004

## Blatt 2

**AUFGABE 9 :**

Es werden die Menge  $M = \{1, 2, 3, \dots, 15\}$  und ihre Teilmengen  $A = \{1, 3, 5, 7, \dots, 15\}$ ,  $B = \{4, 8, 12\}$ ,  $C = \{2, 4, 6, 8, 9, 10, 11, \dots, 15\}$  betrachtet. Bestimmen Sie  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \cap C$ ,  $C \setminus B$ ,  $B \setminus C$  und  $B \Delta C$ .

**AUFGABE 10 :**

Es sei  $A = \{a, b, c, d, e\}$  und  $B = \{M \mid M \subseteq A\}$ . Überprüfen Sie die folgenden Aussagen:

- a)  $a \in B$ , b)  $\{b\} \in B$ , c)  $\{a\} \in A$ , d)  $A \in B$ , e)  $A \subseteq B$ , f)  $\{a\} \subseteq A$ ,  
g)  $\emptyset \in A$ , h)  $\emptyset \subseteq A$ , i)  $\{\emptyset\} \subseteq A$ , j)  $\emptyset \in B$ , k)  $\emptyset \subseteq B$ , l)  $\{\emptyset\} \subseteq B$ .

**AUFGABE 11 :**

$A, B, C$  und  $D$  seien beliebige Mengen. Untersuchen Sie die Richtigkeit folgender Gleichungen:

- a)  $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B$   
b)  $A \setminus B = A \cap (A \setminus B)$   
c)  $A = (A \setminus B) \cup B$

**AUFGABE 12 :**

Man erweitert Funktionen  $f : A \rightarrow B$  oft zu Funktionen  $F : \wp(A) \rightarrow \wp(B)$  auf Teilmengen, durch  $F(X) = \{y \mid y = f(x), x \in X\}$  für  $X \subseteq A$ . Zeigen Sie, dass folgende Aussagen für  $X, Y \subseteq A$  gelten.

- a)  $X \subseteq Y \Rightarrow F(X) \subseteq F(Y)$ ,  
b)  $F(X \cup Y) = F(X) \cup F(Y)$  und  
c)  $F(X \cap Y) \subseteq F(X) \cap F(Y)$

Zeigen Sie außerdem, dass in c) die Gleichheit im Allgemeinen nicht gilt.

**AUFGABE 13 :**

Die Fibonacci-Zahlen  $f_n$ ,  $n \in \mathbb{N}_+$ , seien definiert durch  $f_1 = 1$ ,  $f_2 = 1$  und  $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$  ( $n \geq 2$ ). Beweisen Sie, dass für alle  $n \in \mathbb{N}_+$  gilt:  $\text{ggT}(f_n, f_{n+1}) = 1$ .

**KORREKTURAUFGABE 14 :**

Überprüfen Sie die folgenden 2-stelligen Relation auf die Eigenschaften Symmetrie, Asymmetrie, Antisymmetrie, Reflexivität, Irreflexivität, Transitivität und Alternativität. Geben Sie außerdem an, ob es sich bei den Relationen um Äquivalenz- oder Ordnungsrelationen handelt.

1. „ $\subseteq$ “  $\subseteq \wp(M) \times \wp(M)$  ( $M$  - beliebige Menge) mit  $A \subseteq B \Leftrightarrow A$  ist Teilmenge von  $B$   
( $A, B \subseteq M$ )
2. „ $|$ “  $\subseteq \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+$  mit  $a|b \Leftrightarrow a$  teilt  $b$  ( $a, b \in \mathbb{N}_+$ )
3.  $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}^2$
4. „verheiratet mit“  $\subseteq H \times H$  ( $H$  - Menge aller Menschen)
5. „weiß mehr als“  $\subseteq H \times H$

Die Relationen 4 und 5 gehen nicht in die Bewertung ein.

**AUFGABE 15 :**

Ist eine asymmetrische Relation immer irreflexiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

**AUFGABE 16 :**

Seien  $a, b, n \in \mathbb{N}$ . Ergeben  $a$  und  $b$  bei Division durch  $n$  den gleichen Rest, so sagt man „ $a$  ist kongruent zu  $b$  modulo  $n$ “, geschrieben:

$$a \equiv b \pmod{n}$$

Dies ist somit eine Relation auf  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .

Beispiel:  $7 \equiv 2 \pmod{5}$ , da  $7 \div 5 = 1$  Rest 2 und  $2 \div 5 = 0$  Rest 2.

Geben Sie die Eigenschaften dieser Relation an (siehe Aufgabe 6). Liegt eine Relation speziellen Typs vor?