Korrekturaufgabe 51

Verifizieren Sie den nachfolgenden Programmausschnitt. Was tut das Programm?

$\{a = x, b = y\}$

```
begin
```

$\{a = x, b = y\}$

$\rightarrow \{a - b = x - b, b = y\}$

```
a := a - b;
```

$\{a = x - b, b = y\}$

$\rightarrow \{a - a = x - a - b, a + b = a + y\}$

```
b := a + b;
```

$\{a - a = x - b, b = a + y\}$

$\rightarrow \{0 = x - b, b - a = y\}$

```
a := b – a;
```

$\{0 = x - b, a = y\}$

$\rightarrow \{b = x, a = y\}$

```
end
```

$\{b = x, a = y\}$

Das Programm vertauscht die Werte der Variablen a und b.

Korrekturaufgabe 54

Gegeben sei das folgende Programm:

$\{n \geq 0\}$

```
begin
```

$\{n \geq 0, 0 = 0\}$

```
i := 0;
```

$\{n \geq 0, i = 0\}$

$\rightarrow \{n \geq 0, i = 0, 0 = 0\}$

```
x := 0;
```

$\{n \geq 0, i = 0, x = 0\}$

```
    while (i < n) do begin
        x := x + 2 * i + 1;
        i := i + 1;
    end
end
```

a) Nachfolgenden sind 5 Invarianten angegeben. Untersuchen Sie, welche davon sich auf die Schleife in obigem Programm anwenden lassen. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

$I_1 = \{i > n\}, I_2 = \{i < 0\}, I_3 = \{x = i^2\}, I_4 = \{x = 2ni\}, I_5 = \{i \leq n\}$

Test der Invariante $I_1 = \{i > n\}$

Diese Invariante ist falsch, da die Bedingung bereits vor dem ersten Schleifendurchlauf falsch ist, da $0 > n$ nur für negative Werte von n erfüllt ist, was nicht mit der Eingabe ($n \geq 0$) übereinstimmt.

Test der Invariante $I_2 = \{i < 0\}$

Diese Invariante ist falsch, da die Bedingung bereits vor dem ersten Schleifendurchlauf falsch ist, da $i = 0$ die Bedingung $i < 0$ nicht erfüllen kann.

Test der Invariante $I_3 = \{x = i^2\}$

$\{n \geq 0, i = 0, x = 0\}$

$\rightarrow \{n \geq 0, i = 0, x = 0, x = i^2\}$

```
while (i < n) do begin
```

$\{n \geq 0, i = 0, x = 0, x = i^2, i < n\}$

$\rightarrow \{n \geq 0, i = 0, x + 2 \cdot i + 1 = 0 + 2 \cdot i + 1, x + 2 \cdot i + 1 = i^2 + 2 \cdot i + 1, i < n\}$

```
x := x + 2 * i + 1;
```

$\{n \geq 0, i = 0, x = 1, x = 1, i < n\}$

$\rightarrow \{n \geq 0, i + 1 = 0 + 1, x = 1, x = 1, i + 1 < n + 1\}$

```
i := i + 1;
```

$\{n \geq 0, i = 1, x = 1, x = 1, i \leq n\}$

$\rightarrow \{n \geq 0, i = 1, x = 1, x = i^2, i \leq n\}$

```
end
```

$\{n \geq 0, i = 1, x = 1, x = i^2, i \leq n, i \geq n\}$

$\rightarrow \{n \geq 0, i = n, x = i^2\}$

Da am Ende des Schleifendurchlaufs die Invariante weiterhin gilt, handelt es sich um eine gültige Invariante für diese Schleife.

Test der Invariante $I_4 = \{x = 2ni\}$

$\{n \geq 0, i = 0, x = 0\}$

$\rightarrow \{n \geq 0, i = 0, x = 0, x = 2ni\}$

```
while (i < n) do begin
```

$\{n \geq 0, i = 0, x = 0, x = 2ni, i < n\}$

$\rightarrow \{n \geq 0, i = 0, x + 2 \cdot i + 1 = 0 + 2 \cdot i + 1, x + 2 \cdot i + 1 = 2ni + 2 \cdot i + 1, i < n\}$

```
x := x + 2 * i + 1;
```

$\{n \geq 0, i = 0, x = 1, x = 1, i < n\}$

$\rightarrow \{n \geq 0, i + 1 = 0 + 1, x = 1, x = 1, i + 1 < n + 1\}$

```
i := i + 1;
```

$\{n \geq 0, i = 1, x = 1, x = 1, i \leq n\}$

$\not\rightarrow \{n \geq 0, i = 1, x = 1, x = 2ni, i \leq n\}$

```
end
```

Da am Ende des Schleifendurchlaufs die Invariante nicht mehr gilt, handelt es sich um keine gültige Invariante für diese Schleife.

Test der Invariante $I_5 = \{i \le n\}$

$\{n \ge 0, i = 0, x = 0\}$

$\rightarrow \{n \ge 0, i = 0, x = 0, i \le n\}$

```
while (i < n) do begin
```

$\{n \ge 0, i = 0, x = 0, i \le n, i < n\}$

$\rightarrow \{n \ge 0, i = 0, x + 2 \cdot i + 1 = 0 + 2 \cdot i + 1, i \le n, i < n\}$

```
x := x + 2 * i + 1;
```

$\{n \ge 0, i = 0, x = 1, i \le n, i < n\}$

$\rightarrow \{n \ge 0, i + 1 = 0 + 1, x = 1, i + 1 \le n + 1, i + 1 < n + 1\}$

```
i := i + 1;
```

$\{n \ge 0, i = 1, x = 1, i \le n + 1, i \le n\}$

$\rightarrow \{n \ge 0, i = 1, x = 1, i \le n\}$

```
end
```

$\{n \ge 0, i = 1, x = 1, i \le n, i \ge n\}$

$\rightarrow \{n \ge 0, i = n, x = 1\}$

Da am Ende des Schleifendurchlaufs die Invariante weiterhin gilt, handelt es sich um eine gültige Invariante für diese Schleife.

b) Verifizieren Sie das Programm mit den von Ihnen gefundenen Invarianten. Geben Sie die dazu benutzen Regeln an.

$\{n \geq 0\}$

begin

$\{n \geq 0, 0 = 0\}$ A

i := 0;

$\{n \geq 0, i = 0\}$

$\rightarrow \{n \geq 0, i = 0, 0 = 0\}$ C_1, A

x := 0;

$\{n \geq 0, i = 0, x = 0\}$

$\rightarrow \{n \geq 0, i = 0, x = 0, x = i^2, i \leq n\}$ C_1,L

while (i < n) do begin

$\{n \geq 0, i = 0, x = 0, x = i^2, i \leq n, i < n\}$

$\rightarrow \{n \geq 0, i = 0, x + 2 \cdot i + 1 = 0 + 2 \cdot i + 1, x + 2 \cdot i + 1 = i^2 + 2 \cdot i + 1, i \leq n, i < n\}$ C_1, A

x := x + 2 * i + 1;

$\{n \geq 0, i = 0, x = 0 + 2 \cdot i + 1, x = i^2 + 2 \cdot i + 1, i \leq n, i < n\}$

$\rightarrow \{n \geq 0, i = 0, x = 1, x = 1, i \leq n, i < n\}$ C_2

$\rightarrow \{n \geq 0, i + 1 = 0 + 1, x = 1, x = 1, i + 1 \leq n + 1, i + 1 < n + 1\}$ C_1, A

i := i + 1;

$\{n \geq 0, i = 1, x = 1, x = 1, i \leq n + 1, i < n + 1\}$

$\rightarrow \{n \geq 0, i = 1, x = 1, x = 1, i \leq n + 1, i \leq n\}$ C_2

$\rightarrow \{n \geq 0, i = 1, x = 1, x = i^2, i \leq n + 1, i \leq n\}$ C_2

$\rightarrow \{n \geq 0, i = 1, x = 1, x = i^2, i \leq n\}$ C_2

end

$\{n \geq 0, x = i^2, i \leq n, i \geq n\}$ C_2

$\rightarrow \{n \geq 0, x = n^2\}$

end

$\{n \geq 0, x = n^2\}$

Das Programm berechnet das Quadrat von n.

c) Zeigen Sie, dass das Programm terminiert.

Wenn $n = 0$ ist, ist die Schleifenbedingung $i < n$ nicht erfüllt, da $i = 0$. Somit finden keine Schleifendurchläufe statt und somit terminiert das Programm.

Wenn $n > 0$, ist die Bedingung $i < n$ erfüllt, da $i = 0$, und das Programm durchläuft die Schleife. Als Zählvariable T kann die Variable i gewählt werden, da i bei jedem Schleifendurchlauf um 1 erhöht wird (`i := i + 1;`) und somit monoton steigend ist. Da durch die Schleifenbedingung eine obere Schranke ($i = n$) existiert, terminiert die Schleife.