

Beispiellösungen zu Übung 6

Aufgabe 1: Beispieldurchlauf für die Multiplikation $-7 \cdot 7$

Binärdarstellung von 7: 0111_2

Binärdarstellung von -7: 1001_2

Shift & Add Algorithmus aus der Vorlesung

$Q := -7 = 1001_2$, $M := 7 = 0111_2$

V	A	Q	Nächste Operation	Counter
0	0000	1001	Add 7	Initial.
0	0111	-"	shift \rightarrow	0
0	0011	1100	shift \rightarrow	0
0	0001	1110	shift \rightarrow	1
0	0000	1111	Add 7	2
0	0111	-"	shift \rightarrow	3
0	0011	1111	Sub 7 (Ergebnis Korrektur)	3
0	1100	-"	\rightarrow Ergebnis	

Ergebnis: $1001111_2 = -49_{10}$

Booth Algorithmus

$Q := 7 = 0111_2$, $M := -7 = 1001_2$

A	Q	Nächste Operation	Counter
0000	0111 0	sub -7	0
0111	0111 0	shift \rightarrow	1
0011	1011 1	shift \rightarrow	2
0001	1101 1	shift \rightarrow	3
0000	1110 1	add -7	3
1001	1110 1	\Rightarrow Ergebnis	

Ergebnis: $1001111_2 = -49_{10}$

Kernidee des Booth-Algorithmus

Angenommen die Binärzahlen Y und X sollen multipliziert werden. Dabei sei X von der Form $X = x_2 \cdot 2^{i+k+2} + x_1 \cdot 2^i + x_0$. Weiterhin wird davon ausgegangen, daß x_1 von der Form ist:

$$x_1 = \overset{i+k+1}{0} 11 \cdots 111 \overset{i}{0} \quad (1)$$

Im folgenden soll nur der Anteil von x_1 am Endergebnis betrachtet werden:

$$\begin{aligned} Y \cdot x_1 &= Y \cdot 2^{i+k} + \dots + Y \cdot 2^{i+1} \\ &= Y \cdot \sum_{j=i+1}^{i+k} 2^j \\ &= Y \cdot \left(\sum_{j=0}^{i+k} 2^j - \sum_{h=0}^i 2^h \right) \\ &= Y \cdot \left((2^{i+k+1} - 1) - (2^{i+1} - 1) \right) \\ &= Y \cdot (2^{i+k+1} - 2^{i+1}) \end{aligned} \quad (2)$$

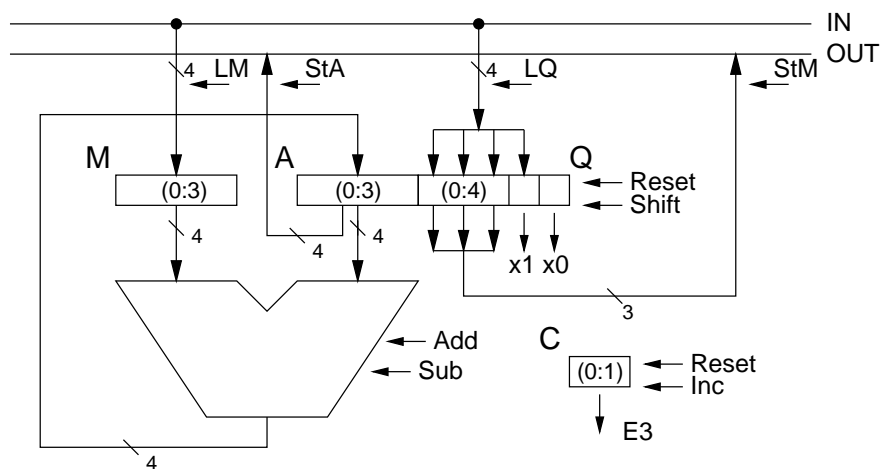
Somit sind zur Multiplikation von Blöcken mit Einsen nur eine Addition und eine Subtraktion erforderlich. Dieses nutzt der Algorithmus aus. Allerdings arbeitet er nur ab Bursts mit mehr als zwei Einsen besser als der 'Schul-Algorithmus'. Bei Zahlen mit ständigem Wechsel von '0' und '1' (z.B. 0101010) ist der Algorithmus um den Faktor 2 schlechter.

Damit der Algorithmus den Beginn eines Einser-Bursts erkennen kann, wird die Stelle n des Registers Q mit Null initialisiert.

Abschließend ein plausibles Beispiel:

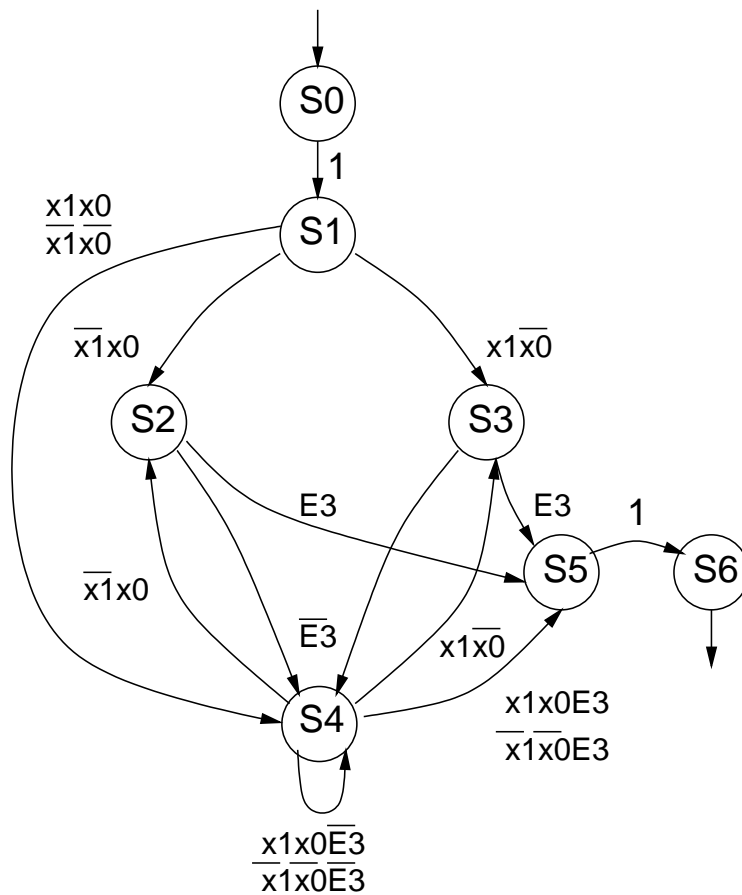
$$Y * 01110_2 = Y * 14_{10} = Y * (16_{10} - 2_{10}) = Y * 1000_2 - Y * 00010_2 \quad (3)$$

Aufgabe 2: Realisierung des Booth-Algorithmus



Aufteilung der Register und die Datenflußpfade, zusammen mit den Status- und den Steuersignalen.

- Reset Registerinhalte werden auf Null gesetzt.
- LM Vom INBUS werden die Daten in das M-Register übernommen.
- LQ Vom INBUS werden die Daten in das Q-Register übernommen.
- Add Addition von M und A wird vorgenommen und Ergebnis in A geschrieben.
- Sub Subtraktion von M und A wird vorgenommen und Ergebnis in A geschrieben.
- Shift A und Q werden gemeinsam nach rechts geschoben; Bit 0 wird dupliziert.
- Inc Counter wird um eins hochgezählt.
- StA Inhalt von A wird an den OUTBUS übergeben
- StQ Inhalt von Q wird an den OUTBUS übergeben
- E3 Counter ist gleich 3.
- x1 Bit n-1 von Q.
- x0 Bit n von Q.



Automat des Steuerwerks:

- S0: LM, Reset
- S1: LQ
- S2: Add
- S3: Sub
- S4: Shift, Inc
- S5: StA
- S6: StQ