Friedhelm Meyer auf der Heide
Dominic Dumrauf, Michael Kortenjan, Ulf Lorenz,
Gunnar Schomaker, Tim Süss, Mario Vodisek, Alexander Willms

Paderborn, den 21. Dezember

Abgabe: 11. Januar, 2005, 12:30 Uhr, Kästen Flur D3

Übung zur Vorlesung

Einführung in Berechenbarkeit, Komplexität und Formale Sprachen

WS 2004/05

Blatt 11

Dieser Zettel beinhaltet ausgewählte Aufgaben aus den bisher behandelten Bereichen. Viel Erfolg und ein Frohes Weihnachtsfest wünschen Prof. Meyer auf der Heide und das Tutorenteam :-)

AUFGABE 41 (5 Punkte)**:**
Betrachten Sie die beiden folgenden Sprachen. Eine dieser Sprachen ist rekursiv aufzählbar, aber nicht entscheidbar, die andere ist entscheidbar.

1. $L_1 := \{(\langle M \rangle, w, d) \mid d \in \mathbb{N}$ und M akzeptiert die Eingabe w nach höchstens d Schritten.$\}$
2. $L_2 := \{(\langle M \rangle, w, d) \mid d \in \mathbb{N}$ und M akzeptiert die Eingabe w nach mindestens d Schritten.$\}$

Geben Sie für die entscheidbare dieser beiden Sprachen eine DTM an, die die Sprache entscheidet. Für die andere Sprache geben Sie eine DTM an, die die Sprache akzeptiert.

AUFGABE 42 (5 Punkte)**:**
Zeigen Sie durch Reduktion, dass die Sprache L nicht entscheidbar ist:

$$L = \{\langle M_1 \rangle \langle M_2 \rangle \mid L(M_1) \subset L(M_2)\}$$

D.h. in L sind alle Paare von DTMs $\langle M_1 \rangle \langle M_2 \rangle$, sodass die von M_1 akzeptierte Sprache eine echte Teilmenge der von M_2 akzeptierten Sprache ist.

AUFGABE 43 (5 Punkte)**:**
Zeigen Sie per Diagonalisierung, dass die folgende Sprache S

$$S = \{\langle M \rangle \mid \text{die von } M \text{ akzeptierte Sprache ist leer}\}$$

nicht entscheidbar ist.
(Tipp: Benutzen Sie eine NTM für die Beweisführung !)

AUFGABE 44 (5 Punkte)**:**
Sei Co-NP $:= \{L \mid \bar{L} \in \text{NP}\}$, zeigen Sie:

$$\text{NP=Co-NP} \quad \Leftrightarrow \quad \exists L : L \text{ ist NP-vollständig und } \bar{L} \in \text{NP}.$$

Bemerkung: Wie bei NP≠P vermutet man, dass NP≠Co-NP gilt. Das ist jedoch z.Zt. noch nicht bewiesen

AUFGABE 45 (5 Punkte)**:**
Wir definieren die zwei Probleme *Independent Set* (IS) und *Bin Programming* (BP):

IS: Gegeben ist ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und ein $k \in \{0, \ldots, |V|\}$. Gibt es eine unabhängige Menge $U = \{v_1 \ldots, v_k\} \subseteq V$, so dass für alle $i \neq j$ gilt $\{v_i, v_j\} \notin E$?

BP: Gegeben ist eine Matrix $A \in M_{n,m}(\mathbb{Z})$ und ein Vektor $b \in \mathbb{Z}^n$. Gibt es einen Vektor $y \in \{0,1\}^m$, so dass das Ungleichungssystem $A \cdot y \leq b$ gilt?

IS ist NP-vollständig, zeigen Sie: IS $\leq_p$ BP

AUFGABE 46 (5 Punkte)**:**
Wir betrachten das Optimierungsproblem BilligUmziehen. Hierbei sollen n Umzugsgüter in möglichst wenige Umzugskartons verpackt werden. Dabei nehmen wir an, dass die Kapazität eines Kartons genau 1 ist, und dass das i-te Umzugsgut G_i Grösse $a_i \leq 1$ hat. Ferner soll gelten, dass ein Karton eine Menge von Umzugsgütern genau dann aufnehmen kann, wenn diese in der Summe höchstens Grösse 1 haben.
Betrachte nun den folgenden Algorithmus zum Packen der Umzugsgüter $G_1, \ldots, G_n$ in die Kartons $K_1, K_2, \ldots$

Eiliges Packen

Setze $l := 1$

Für $i := 1, \ldots, n$ *wiederhole folgende Schritte*

Falls ein $j \leq l$ *existiert, so dass* G_i *in* K_j *hineinpasst, packe* G_i *in* K_j*.*

Sonst setze $l := l + 1$ *und packe* G_i *in* K_l*.*

Ausgabe l

Zeigen Sie, dass Eiliges Packen einen Approximationsfaktor von 2 erreicht, das heisst, der Algorithmus benötigt höchstens doppelt soviele Umzugskartons wie bei einer optimalen Packung der Gegenstände $G_1, \ldots, G_n$.