Einführung in Berechenbarkeit, Komplexität und Formale Sprachen: Blatt 12

Bernhard Dietrich (6256800)
Lars Fernhomberg (6256030)
Sebastian Kniesburges (6257120)

Übungsgruppe 4
Montag 16:00-18:00
Gunnar Schomaker

Aufgabe 48

$G' = \left(V, \Sigma, P, \langle \text{Ausdruck} \rangle\right)$ mit

$V = \left\{\langle \text{Ausdruck} \rangle, \langle \mathit{Faktor} \rangle\right\}$

$\Sigma = \left\{a, (,), *, +\right\}$

$$P = \begin{cases} P1: \langle \text{Ausdruck} \rangle \to \langle \text{Ausdruck} \rangle + \langle \text{Ausdruck} \rangle \\ P2: \langle \text{Ausdruck} \rangle \to \langle \text{Faktor} \rangle \\ P3: \langle \text{Ausdruck} \rangle \to \langle \text{Faktor} \rangle * \langle \text{Ausdruck} \rangle \\ P4: \langle \text{Faktor} \rangle \to a \\ P5: \langle \text{Faktor} \rangle \to \left(\langle \text{Ausdruck} \rangle\right) \end{cases}$$

Ableitung 1:

$$\langle \text{Ausdruck} \rangle \xrightarrow{\text{P1}} \langle \text{Ausdruck} \rangle + \langle \text{Ausdruck} \rangle \xrightarrow{\text{P3}} \langle \text{Faktor} \rangle * \langle \text{Ausdruck} \rangle + \langle \text{Ausdruck} \rangle$$
$$\xrightarrow{\text{P4}} \text{a} * \langle \text{Ausdruck} \rangle + \langle \text{Ausdruck} \rangle \xrightarrow{\text{P3}} \text{a} * \langle \text{Faktor} \rangle + \langle \text{Ausdruck} \rangle \xrightarrow{\text{P4}} \text{a} * \text{a} + \langle \text{Ausdruck} \rangle$$
$$\xrightarrow{\text{P1}} \text{a} * \text{a} + \langle \text{Ausdruck} \rangle + \langle \text{Ausdruck} \rangle \xrightarrow{\text{P3}} \text{a} * \text{a} + \langle \text{Faktor} \rangle + \langle \text{Ausdruck} \rangle$$
$$\xrightarrow{\text{P4}} \text{a} * \text{a} + \text{a} + \langle \text{Ausdruck} \rangle \xrightarrow{\text{P3}} \text{a} * \text{a} + \text{a} + \langle \text{Faktor} \rangle \xrightarrow{\text{P4}} \text{a} * \text{a} + \text{a} + \text{a}$$

Ableitung 2:

$$\langle \text{Ausdruck} \rangle \xrightarrow{\text{P3}} \langle \text{Faktor} \rangle * \langle \text{Ausdruck} \rangle \xrightarrow{\text{P4}} \text{a} * \langle \text{Ausdruck} \rangle \xrightarrow{\text{P1}} \text{a} * \langle \text{Ausdruck} \rangle + \langle \text{Ausdruck} \rangle$$
$$\xrightarrow{\text{P3}} \text{a} * \langle \text{Faktor} \rangle + \langle \text{Ausdruck} \rangle \xrightarrow{\text{P4}} \text{a} * \text{a} + \langle \text{Ausdruck} \rangle \xrightarrow{\text{P1}} \text{a} * \text{a} + \langle \text{Ausdruck} \rangle + \langle \text{Ausdruck} \rangle$$
$$\xrightarrow{\text{P3}} \text{a} * \text{a} + \langle \text{Faktor} \rangle + \langle \text{Ausdruck} \rangle \xrightarrow{\text{P4}} \text{a} * \text{a} + \text{a} + \langle \text{Ausdruck} \rangle \xrightarrow{\text{P3}} \text{a} * \text{a} + \text{a} + \langle \text{Faktor} \rangle$$
$$\xrightarrow{\text{P4}} \text{a} * \text{a} + \text{a} + \text{a}$$

Aufgabe 49

$G'' = (V, \Sigma, P, S)$ mit

$V = \{S\}$

$\Sigma = \{a, b, c\}$

$$P = \begin{cases} P1: S \to \lambda \\ P2: S \to SASBSCS \\ P3: AB \to BA \\ P4: AC \to CA \\ P5: BC \to CB \\ P6: A \to a \\ P7: B \to b \\ P8: C \to c \end{cases}$$

Durch die Produktion $P2$ werden drei Terminalsymbole hinzugefügt, die durch die Produktionen $P6$ bis $P8$ in die entsprechenden Nicht-Terminalsymbole umgewandelt werden. Durch die Produktionen $P3$ bis $P5$ werden die Nicht-Terminalsymbole in die gewünschte Reihenfolge gebracht. Da lediglich nur durch die Produktion $P2$ die Länge des Wortes verändert wird und hierbei alle drei Symbole durch ihre Stellvertreter eingefügt werden, kommen alle drei Nicht-Terminalsymbole gleich oft im Wort vor, so dass die Bedingung $\#_a(w) = \#_b(w) = \#_c(w)$ erfüllt ist.

Aufgabe 50

$H1 = (V_1, \Sigma_1, \mathrm{Prod}_1, S)$ mit

$V_1 = \{S, A, B, C\}$

$\Sigma_1 = \{0, 1\}$

$$\mathrm{Prod}_1 = \begin{cases} P_1: S \to 0 \\ P_2: S \to 111 \\ P_3: S \to 0S \\ P_4: S \to 111S \\ P_5: S \to 11S1 \\ P_6: S \to 1S11 \end{cases}$$

Die Grammatik soll eine Sprache erzeugen, bei der die Anzahl der Einsen in einem Wort w durch 3 teilbar ist. Somit muss die Anzahl der Einsen ein vielfaches von drei sein.
Werden nur die Produktionen P_1 und/oder P_3 angewendet, so kommt die Eins in dem erzeugten Wort keinmal vor. Da 0 ein vielfaches von 3 ist $(0/3 = 0)$ stimmt die Aussage für diesen Fall.
Werden zusätzlich noch die Produktionen P_2 bzw. P_4 bis P_6 angewendet, so werden bei jeder Produktion 3 Einsen hinzugefügt. Werden diese Produktionen i mal angewendet, so besitzt das Wort am Ende $3i$ Einsen, was offensichtlich ein Vielfaches von 3 ist.

$H_2 = (V_2, \Sigma_2, \mathrm{Prod}_2, S)$

$V_2 = \{S\}$

$\Sigma_2 = \{0,1\}$

$$\text{Prod}_2 = \begin{cases} P_1 : S \to \lambda \\ P_2 : S \to 0 \\ P_3 : S \to 01S \\ P_4 : S \to 1S \end{cases}$$

Die Grammatik soll ein beliebiges Wort erzeugen, welches nicht die Zeichenfolge 00 enthält. Dieses ist der Fall, da lediglich durch die Produktionen $P2$ und $P3$ das Symbol 0 hinzugefügt wird. $P2$ ist zum Abschluss des Wortes gedacht und kann lediglich am Ende des Wortes zum Einsatz kommen. Da die Produktion $P3$ sicherstellt, dass nach der dort eingefügten 0 noch eine 1 folgt, kann somit die Produktion $P2$ keine 0 an eine vorhandene 0 anfügen. Aus dem gleichen Grund kann auch die Produktion $P3$ nicht die Zeichenfolge 00 erzeugen. Somit hat die Grammatik die geforderte Eigenschaft.