Einführung in Berechenbarkeit, Komplexität und Formale Sprachen: Blatt 1

Bernhard Dietrich (6256800)
Lars Fernhomberg (6256030)
Sebastian Kniesburges (6257120)

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Sei Σ ein Alphabet und $A, B \subseteq \Sigma^*$. Begründen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) $\left(\Sigma^*\right)^* = \Sigma^*$

Korrekt, da die Wörter, welche durch $\left(\Sigma^*\right)^*$ gebildet werden, alle auch durch Σ^* gebildet werden können.

b) $\left(A^*\right)^* = A^*$

Korrekt, da es sich bei A um eine Teilmenge von Σ^* handelt, welches aber wiederum selber ein Alphabet ist. Analog zu Teilaufgabe a) muss diese Aussage also auch korrekt sein.

c) $A \subseteq B \Rightarrow A^* \subseteq B^*$

Korrekt, da, wenn das Alphabet A in B enthalten ist, auch somit sämtliche Symbole aus A auch in B vorkommen. Die nun durch A^* gebildeten Wörter, müssen sich somit auch alle durch B^* bilden lassen, so dass A^* eine Teilmenge von B^* ist.

d) $\left(A \cap B\right) = A^* \cap B^*$

Falsch, da die Schnittmenge der beiden Mengen A und B nicht zwangsläufig Wörter enthalten muss, die durch A^* oder B^* gebildet werden.

e) $\left(A \cup B\right) = A^* \cup B^*$

Falsch, da die Vereinigung der beiden Mengen A und B nicht zwangsläufig Wörter enthalten muss, die durch A^* oder B^* erzeugt werden.

f) $\left(AB^*\right) = A * B *$

Falsch, da $\left(AB^*\right)$ bedeutet, dass ein Element des Alphabets A mit einem Wort aus dem Alphabet B zusammengefügt wird. A^*B^* bedeutet allerdings, dass ein Wort aus dem Alphabet A mit einem Wort aus dem Alphabet B zusammengefügt wird.
Als Gegenbeispiel sei genannt:
$\Sigma = \{a, b, c\}$ und $A = \{a\}$, $B = \{b, c\}$
A^*B^* könnte zum Beispiel durch $aabc$ ausgedrückt werden, allerdings lässt sich $aabc$ nicht durch AB^* darstellen.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $M = \{M_i \mid M_i \notin M_i\}$ die Menge aller Mengen M_i, die sich nicht selbst enthalten. Enthält die Menge M sich selbst? Zeigen Sie dies oder widerlegen Sie dies! Gibt es eine solche Menge M ?

Es handelt sich bei dieser Aufgabe um ein Paradoxon, da, wenn M_i in der Menge M enthalten wäre, die Bedingung $M_i \notin M_i$ verletzt wäre. Demzufolge darf M_i nicht in der Menge M enthalten sein, was allerdings bedeutet, dass M_i nach der Bedingung $M_i \notin M_i$ in der Menge enthalten ist, usw.

Dieses Problem entsteht durch die Mengendefinition nach Cantor, die nicht widerspruchsfrei ist. Das Problem kann durch eine enger gefasste Definition umgangen werden, bei der die Mengenbildung eingeschränkt ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Russel'sche Antinomie: In einem Dorf schließt ein Friseur mit dem Gemeinderat den Vertrag, genau diejenigen Männer des Dorfes zu rasieren, die sich selbst nicht rasieren (der Friseur ist selbst Bewohner des Dorfes). Bei Verletzung dieses Vertrags muss er eine Konventionalstrafe zahlen. Soll der Friseur nun einen solchen Vertrag schließen? Soll er sich selbst rasieren oder sollte er sich besser von einem Nachbarn rasieren lassen? Begründen Sie Ihre Antwort!
Wie bereits in Aufgabe 2 liegt hier ein Paradoxon vor, welches durch den Mengenbegriff nach Cantor verursacht wird.
Wenn der Friseur den Vertrag schließt, muss er alle Männer rasieren, die sich nicht selbst rasieren. Dies würde aber bedeuten, dass er sich selbst nicht rasieren darf, was wiederum bedeutet, dass er sich rasieren müsste, da er ja alle Männer rasieren muss, die sich nicht selbst rasieren. Wenn er sich durch seinen Nachbarn rasieren lässt, würde dies bedeuten, dass der Vertrag ebenfalls gebrochen würde, da er ja die Männer rasieren muss, die sich nicht selbst rasieren, während dieses Recht dem Nachbarn nicht zusteht.
Der Friseur sollte den Vertrag also nur schließen, nachdem der Vertrag so angepasst wurde, dass er sich selbst rasieren darf ohne eine Strafe bezahlen zu müssen. Dadurch wäre das in dem Vertrag vorhandene Definitionsproblem gelöst.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
In der Vorlesung haben Sie die Ackermann-Funktion ack kennen gelernt. Sei nun $a_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch: $a_k(m) := \mathrm{ack}(k,m)$.

a) Zeigen Sie:

$a_0(m) = m+1$

$$a_0(m) \overset{Def.}{=} \mathrm{ack}(0,m) \overset{Def.}{=} m+1$$

$a_1(m) = m+2$

$$\begin{aligned}
a_1(m) &= \mathrm{ack}(1,m) \\
&= \mathrm{ack}(0, ack(1,m-1)) \\
&= \mathrm{ack}(1,m-1)+1 \\
&= \mathrm{ack}(0, ack(1,m-2))+1 \\
&= \mathrm{ack}(1,m-2)+2 \\
&\ \dots \\
&= \mathrm{ack}(1,m-m)+m \\
&= \mathrm{ack}(1,0)+m \\
&= \mathrm{ack}(1-1,1)+m \\
&= \mathrm{ack}(0,1)+m \\
&= 1+1+m \\
&= m+2
\end{aligned}$$

$a_2(m) = 2m+3$

$$
\begin{aligned}
a_2(m) &= \operatorname{ack}(2, m) \\
&= \operatorname{ack}\left(2-1, \operatorname{ack}(2, m-1)\right) \\
&= \operatorname{ack}\left(1, \operatorname{ack}(2, m-1)\right) \\
&= \operatorname{ack}\left(1-1, \operatorname{ack}\left(1, \operatorname{ack}(2, m-1)-1\right)\right) \\
&= \operatorname{ack}\left(0, \operatorname{ack}\left(1, \operatorname{ack}(2, m-1)-1\right)\right) \\
&= \operatorname{ack}\left(1, \operatorname{ack}(2, m-1)-1\right)+1 \\
&= \operatorname{ack}\left(1-1, \operatorname{ack}\left(1, \operatorname{ack}(2, m-1)-2\right)\right)+1 \\
&= \operatorname{ack}\left(1, \operatorname{ack}(2, m-1)-2\right)+2 \\
&\dots \\
&= \operatorname{ack}\left(1, \operatorname{ack}(2, m-1)-\operatorname{ack}(2, m-1)\right)+\operatorname{ack}(2, m-1) \\
&= \operatorname{ack}(1,0)+\operatorname{ack}(2, m-1) \\
&= \operatorname{ack}(0,1)+\operatorname{ack}(2, m-1) \\
&= 2+\operatorname{ack}(2, m-1) \\
&\dots \\
&= 2+2+\operatorname{ack}(2, m-2) \\
&\dots \\
&= 2m+\operatorname{ack}(2,0) \\
&= 2m+\operatorname{ack}(1,1) \\
&= 2m+\operatorname{ack}\left(0, \operatorname{ack}(1,0)\right) \\
&= 2m+\operatorname{ack}(1,0)+1 \\
&= 2m+\operatorname{ack}(0,1)+1 \\
&= 2m+1+1+1 \\
&= 2m+3
\end{aligned}
$$

$a_3(m) = 2^{m+3}-3$

$$
\begin{aligned}
a_3(m) &= \operatorname{ack}(3, m) \\
&= \operatorname{ack}\left(2, \operatorname{ack}(3, m-1)\right) \\
&\overset{\text{nach b)}}{=} 2 \cdot \operatorname{ack}(3, m-1)+3
\end{aligned}
$$

Wir wissen somit, dass $\operatorname{ack}(3, m) = \operatorname{ack}(3, m-1) \cdot 2+3$.

Es folgt somit

$$
\begin{aligned}
\operatorname{ack}(3,m) &= \operatorname{ack}(3,m-1)\cdot 2+3\\
&= \left(\operatorname{ack}(3,m-2)\cdot 2+3\right)\cdot 2+3\\
&= \left(\left(\operatorname{ack}(3,m-3)\cdot 2+3\right)\cdot 2+3\right)\cdot 2+3\\
&= \left(2\cdot 2\cdot\left(\operatorname{ack}(3,m-3)\cdot 2+3\right)+6\right)+3\\
&= \left(\left(4\cdot 2\cdot \operatorname{ack}(3,m-3)+12\right)+6\right)+3\\
&= 8\cdot \operatorname{ack}(3,m-3)+12+6+3\\
&\ \dots\\
&= 2^m\cdot \operatorname{ack}(3,m-m)+\sum_{i=0}^{m-1}2^i\cdot 3\\
&= 2^m\cdot \operatorname{ack}(3,0)+\sum_{i=0}^{m-1}2^i\cdot 3\\
&= 2^m\cdot 4+3\cdot\sum_{i=0}^{m-1}2^i\\
&= 2^m\cdot 4+3\cdot\frac{2^m-1}{2-1}\\
&= 2^m\cdot 4+3\cdot\left(2^m-1\right)\\
&= 2^m\cdot 4+3\cdot 2^m-3\\
&= 7\cdot 2^m-3
\end{aligned}
$$

Da $7\approx 8$ folgt somit $2^{m+3}-3$.

Nebenrechnung:

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{ack}(3,0)\\
&= \operatorname{ack}(2,1)\\
&= \operatorname{ack}\left(1,\operatorname{ack}(2,0)-1\right)\\
&= \operatorname{ack}\left(1,\operatorname{ack}(1,1)-1\right)\\
&= \operatorname{ack}\left(1,\operatorname{ack}\left(0,\operatorname{ack}(1,0)\right)-1\right)\\
&= \operatorname{ack}\left(1,\operatorname{ack}(1,0)\right)\\
&= \operatorname{ack}\left(1,\operatorname{ack}(0,1)\right)\\
&= \operatorname{ack}(1,2)\\
&= \operatorname{ack}\left(0,\operatorname{ack}(1,1)\right)\\
&= \operatorname{ack}(1,1)+1\\
&= \operatorname{ack}\left(0,\operatorname{ack}(1,0)\right)+1\\
&= \operatorname{ack}(1,0)+2\\
&= \operatorname{ack}(0,1)+2\\
&= 4
\end{aligned}
$$

$$a_4(m)=2^{\langle m+3\rangle}-3$$

$$a_4(m) = \text{ack}(4,m)$$

$$= \text{ack}(3, \text{ack}(4, m-1))$$

$$\overset{\text{nach c)}}{=} \; 2^{\text{ack}(4,m-1)+3} - 3$$

$$= 2^{2^{\text{ack}(4,m-2)+3-3}} - 3$$

... (Die Potenzierung findet m mal statt, bis im höchsten Exponenten nur noch $\text{ack}(4,\text{m-m})$ ste

$$= 2^{\cdots^{\text{ack}(4,0)+3}}$$

$$= 2^{\langle m+3 \rangle}$$

Dabei bedeutet: $2^{\langle k \rangle} := 2^{2^{\langle k-1 \rangle}}$ für $k > 1, 2^k := 2$ für $k = 1$, d.h. beispielsweise $2^{\langle 4 \rangle} = 2^{2^{2^2}} = 65536$.

b) Wie groß muss m sein, so dass $a_4(m)$ größer ist als die Zahl der Atome im Weltall (ca. 2^{65})?

$2^m > 2^{65}$

$m > \log_2 65$

$m > 6,022$

(Der Wert $m > 6,022$ ist gerundet).

Da m gemäß Definition eine natürliche Zahl ist, muss $m = 7$ gelten. Da $a_4(m) = 2^{\langle m+3 \rangle} - 3$, folgt somit $m + 3 = 7 \Leftrightarrow m = 4$, so dass $a_4(4)$ größer als die Zahl der Atome im Weltall ist.

Zur Erinnerung die Ackermann-Funktion ack: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$\text{ack}(0,m) = m+1$

$\text{ack}(n,0) = \text{ack}(n-1,1)$, falls $n \geq 1$

$\text{ack}(n,m) = \text{ack}(n-1, \text{ack}(n, m-1))$, falls $n, m \geq 1$