Einführung in Berechenbarkeit, Komplexität und Formale Sprachen: Blatt 4

Bernhard Dietrich (6256800)
Lars Fernhomberg (6256030)
Sebastian Kniesburges (6257120)

Übungsgruppe 4
Montag 16:00-18:00
Gunnar Schomaker

Aufgabe 13 (5 Punkte)
Betrachten Sie Satz 2.10 des Skriptes, welcher angibt, dass jede RAM durch eine DTM simuliert werden kann. Analysieren Sie die Simulation und beschreiben Sie, wie sich die angegebene Zeitschranke $O\left(t(n)^3\right)$ ergibt.

Beachten Sie: Die RAM kann in einem Schritt addieren, aber nicht (wie im Skript irrtümlich erlaubt) multiplizieren!

Die Simulation einer RAM zu einer DTM erfolgt in 2 Schritten:

1. Die Konfiguration der RAM wird auf einer Mehrband-DTM simuliert, wobei die Eingabe, die Ausgabe sowie die der Befehlszähler mit den Akkumulator und dem Register auf jeweils einem Band geschrieben werden.
2. Die Schritte, die die DTM bei Eingabe x und dem Programm P ausführt werden mit Unterprogrammen der DTM simuliert die jeweils einen Befehl der RAM wie addieren, springen,... simulieren.

Sei die RAM $t(n)$ zeitbeschränkt, so werden also max. $t(n)$ Schritte ausgeführt. Also werden auch max. $t(n)$ unterschiedliche Befehle ausgeführt, also gibt es bei der Turingmaschine max. $t(n)$ Unterprogramme. Die Mehrband-DTM kann pro Schritt der RAM max. ein Eingabe- und ein Ausgabezeichen verarbeiten, gleiches gilt für Register, sodass $s_{k-DTM}(n) = O(t(n))$ gilt.
Da beim Laden bzw. Speichern im worst-case alle Register durchlaufen werden, gilt $t_{k-DTM}(n) = O(t(n)^2)$. Bei der Simulation dieser Mehrband-DTM auf eine Einband-DTM gilt für die Zeitbeschränkung $O(t(n) \cdot s(n))$ also in diesem Fall $O(t_{k-DTM}(n) \cdot s_{k-DTM}(n)) = O(t(n)^2 \cdot t(n)) = O(t(n)^3)$.

Aufgabe 14 (5 Punkte)
Zeigen Sie: Sind L_1 und L_2 entscheidbare bzw. rekursiv aufzählbare Sprachen, so ist L_1L_2 ebenfalls entscheidbar bzw. rekursiv aufzählbar, wobei $L_1L_2 = \{u_1u_2 \mid u_1 \in L_1, u_2 \in L_2\}$.

Sei $M_1 = \left(Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_1^0, F_1\right)$ eine DTM die L_1 und $M_2 = \left(Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_2^0, F_2\right)$ eine DTM die L_2 akzeptiert.
Konstruktion der DTM M', welche L_1L_2 akzeptiert:

- Kopiere die Eingabe für M_1 auf Band 2 und kopiere die Eingabe für M_2 dahinter
- Simuliere die DTM M_1 am Anfang von Band 2
- Falls M_1 hält, bewege den Zeiger auf den Anfang der Eingabe für M_2
- Simuliere die DTM M_2 auf Band 2

Hält nun die zweite Teil-DTM M_2 ebenfalls, so hält die DTM M', so dass L_1L_2 ebenfalls entscheidbar bzw. rekursiv aufzählbar.

Aufgabe 15 (5 Punkte)
Zeigen Sie: Ist L eine entscheidbare oder rekursiv aufzählbare Sprache, so ist L^* ebenfalls entscheidbar oder rekursiv aufzählbar.
Hinweis: $L_k = \left\{a_1 \circ ... \circ a_k \mid a_i \in L, i \in \{1,...,k\}\right\}, L^* = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} L_k \}$

In der Vorlesung sowie im Skript wurde bereits gezeigt, dass, wenn zwei Sprachen L_1 und L_2 rekursiv aufzählbar sind, auch ihre Schnittmenge $L_1 \cap L_2$ rekursiv aufzählbar ist. Seien nun $L_i = \left\{a_1 \circ ... \circ a_i \mid a_k \in L, k \in \{0,...,i\}\right\}$ und $L_j = \left\{a_1 \circ ... \circ a_j \mid a_k \in L, k \in \{0,..., j\}\right\}$ mit $i \neq j$ zwei Sprachen, die durch Aneinanderreihung von Wörtern aus L gebildet werden. Gemäß Aufgabe 14 sind sowohl L_i als auch L_j rekursiv aufzählbar, da L rekursiv aufzählbar ist. Da nun gilt $L^* = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} L_k$, muss L^* auch rekursiv aufzählbar sein, da, wie oben bereits erwähnt wurde, die Schnittmenge von zwei rekursiv aufzählbaren Sprachen ebenfalls rekursiv aufzählbar ist.

Aufgabe 16 (5 Punkte)
Zeige Sie: Entscheidbare Mengen sind bezüglich des Operators MIN abgeschlossen, das bedeutet für eine entscheidbare Sprache L ist $MIN(L)$ entscheidbar, mit

$MIN(L) = \{x \in L: \text{ kein echtes Präfix von } x \text{ ist in } L\}$.

Diese Aufgabe lässt sich durch eine Turingmaschine lösen.
In einem ersten Schritt muss geprüft werden, ob das Element x ein Bestandteil von L ist. Ist dieses der Fall, so wird in einer Schleife geguckt, ob das Wort, welches aus den ersten i (mit $1 \leq i \leq |x|$, wobei i in der Schleife jeweils um eins hochgezählt wird) Zeichen von x besteht ebenfalls in L liegt. Sofern dieses nicht der Fall ist, ist die Aussage nachgewiesen, ansonsten muss solange fortgefahren werden, bis x das erste Mal nicht in L liegt, so dass die Aussage dann wahr ist. Sollten alle entsprechenden Teilfolgen von x in L liegen, so ist die Sprache im Sinne von $MIN(L)$ undefiniert.