Friedhelm Meyer auf der Heide
Dominic Dumrauf, Michael Kortenjan, Ulf Lorenz,
Gunnar Schomaker, Tim Süss, Mario Vodisek, Alexander Willms

Paderborn, den 07. Dezember

Abgabe: 14. Dezember, 2004, 12:30 Uhr, Kästen Flur D3

Übung zur Vorlesung

Einführung in Berechenbarkeit, Komplexität und Formale Sprachen

WS 2004/05

Blatt 9

AUFGABE 33 (5 Punkte)**:**
Sei ein Algorithmus $Algo_1$ gegeben, der ein Problem P_1 in Zeit $O(n^k)$ löst. Ebenso sei ein Algorithmus $Algo_2$ gegeben, der ein Problem P_2 in Zeit $O(n^r)$ löst. Sie lösen nun ein Problem P_3 dadurch, dass Sie auf eine Eingabe der Länge n zuerst Algorithmus 1 und anschließend auf die Ausgabe Algorithmus 2 anwenden. Mit welcher Laufzeit können Sie Ihren Algorithmus für P_3 abschätzen? Begründen Sie Ihre Antwort.

AUFGABE 34 (5 Punkte)**:**
Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, \Gamma, q_0, F)$ eine 1-Band-NTM, die die Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ akzeptiert und $t_M(n)$ zeitbeschränkt ist.
Zeigen Sie: Es gibt eine 2-Band-NTM M', die L akzeptiert, mit der folgenden Eigenschaft: M' rät zu Beginn auf Band 2 eine Zeichenfolge aus $\{0, 1\}^*$ und verhält sich danach ausschließlich deterministisch. Dabei ist $t_{M'}(n) = O(t_M(n))$.

AUFGABE 35 (5 Punkte)**:**
Zeigen Sie, dass man die Sprachen L der Komplexitätsklasse NP allgemein charakterisieren kann durch die folgende Beschreibung: Zu L gibt es eine Eigenschaft $E(\cdot, \cdot)$ und ein Polynom p, so dass gilt:
$L = \{x \mid$ es gibt ein $y, |y| \leq p(|x|)$, mit: $E(x, y)$ kann in Zeit $p(|xy|)$ deterministisch entschieden werden$\}$.

AUFGABE 36 (5 Punkte)**:**
Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta)$ eine DTM, die bei jeder Eingabe hält. Für $w \in \Sigma^*$ ist $S_M(w)$ definiert als der maximale Bandbereich (Anzahl der Zellen), den der Kopf der DTM M bei Eingabe w in einer Rechnung erreicht. Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$S_M(n) := \max\{S_M(w) \mid w \in \Sigma^{\leq n}\}.$$

Die Funktion $S_M : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ heisst die *Platzkomplexität* oder *Platz* der DTM M. Sei $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine monoton wachsende Funktion. Die Klassen $DSPACE(s(n))$ und $PSPACE$ sind definiert als

$$DSPACE(s(n)) := \left\{ L \;\middle|\; \begin{array}{l} L \text{ ist eine Sprache, die von einer DTM mit Platz} \\ O(s(n)) \text{ entschieden wird} \end{array} \right\}$$

$$PSPACE := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} DSPACE(n^k)$$

$PSPACE$ ist die Klasse aller Sprachen L, für die es ein festes, aber beliebiges k und eine DTM mit Platzbedarf $O(n^k)$ gibt, die L entscheidet, d.h. es ist die Klasse der Sprachen, die auf *polynomiellem Platz* entschieden werden.

1. Zeigen Sie, dass gilt: $NP \subseteq PSPACE$

   Geben Sie dazu eine deterministische TM an, die eine nichtdeterministische TM simuliert (s. Skript). Zeigen Sie, dass Ihre DTM mit polynomiellem Platz auskommt.

2. Wieviel Zeit benötigt Ihre deterministische Maschine in O-Notation?