1. Produktionssysteme als Input-Output-Systeme

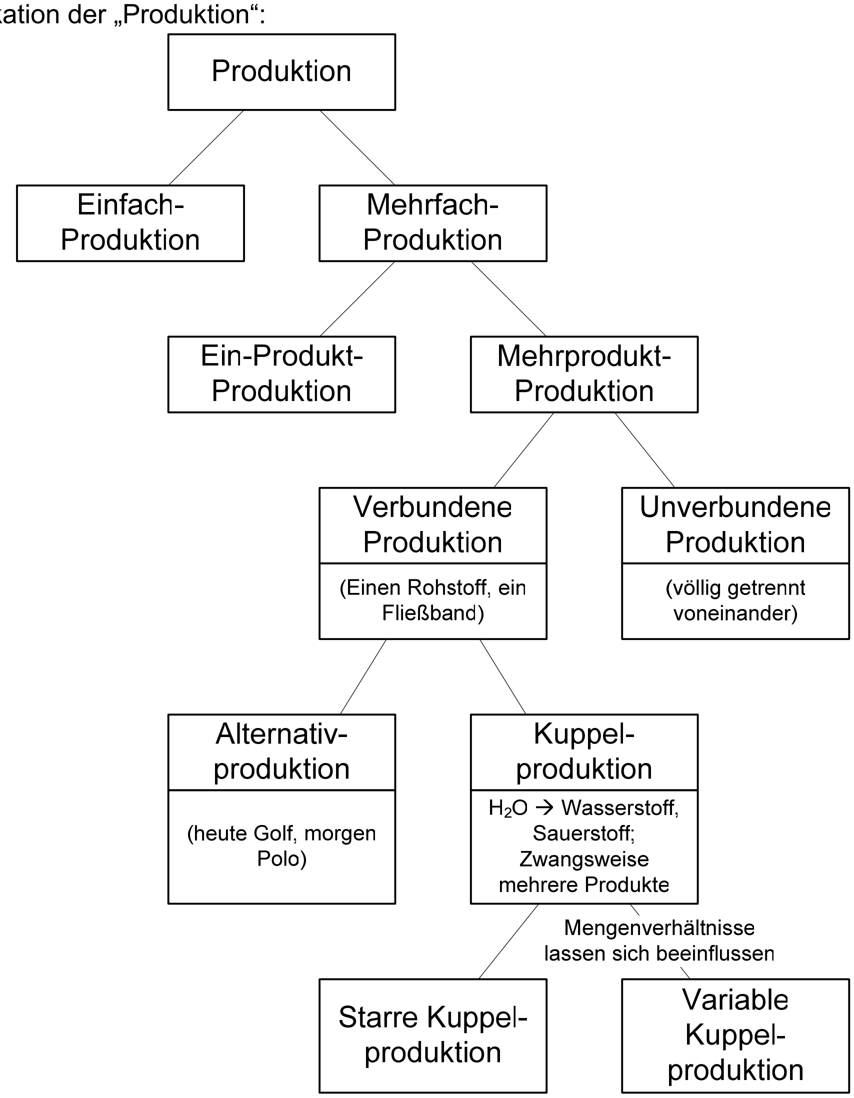
Unter einem IO-System versteht man ein System innerhalb dessen Einsatzgüter (Inputs) in Ausbringungsgüter (Outputs) transformiert werden.

Man unterscheidet:

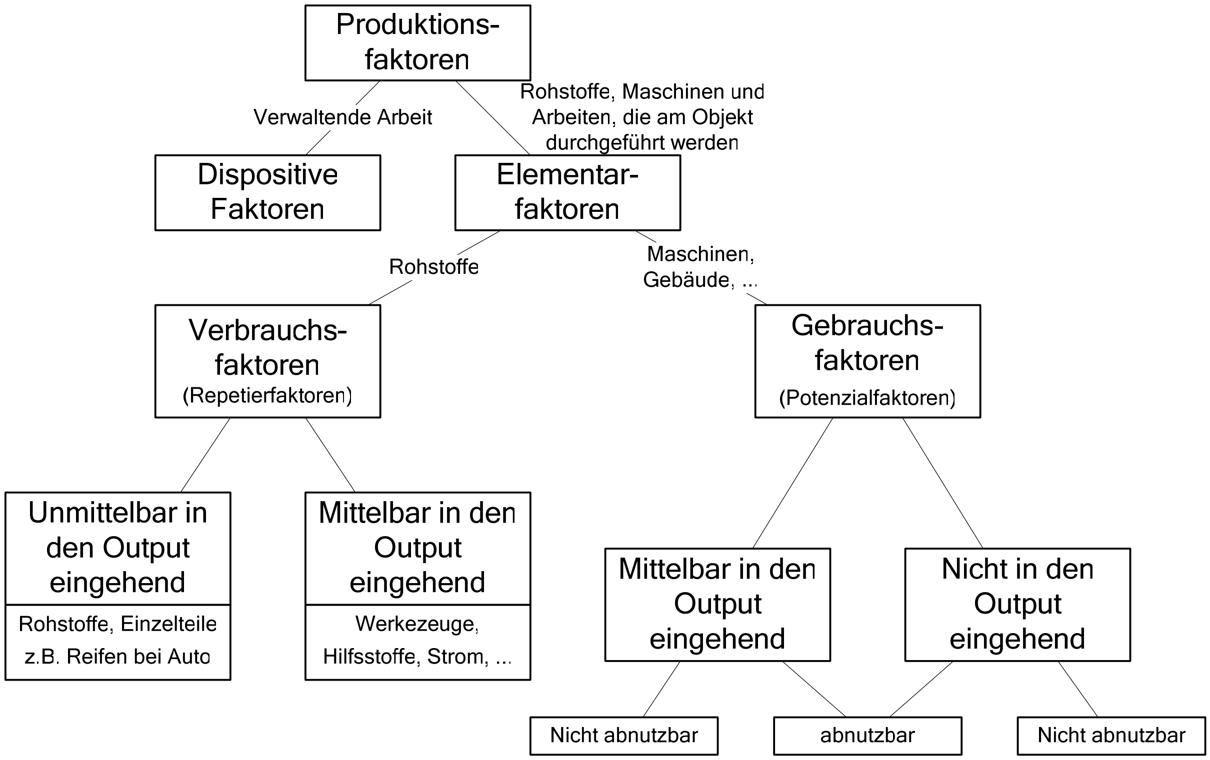
a) Zustandstransformationen, d.h. Input und Output unterscheiden sich in ihrem Zustand.
b) Zeittransformationen, d.h. Input und Output unterscheiden sich in ihrer zeitlichen Zuordnung
c) Ortstransformation, d.h. Input und Output unterscheiden sich in ihrer räumlichen Zuordnung (Bsp.: Transport)

Schwerpunkt: a) Zustandstransformation
Hierzu gehört die „Produktion", die aus bestimmten Inputs („Produktionsfaktoren") bestimmte Outputs („Produkte") erstellt.

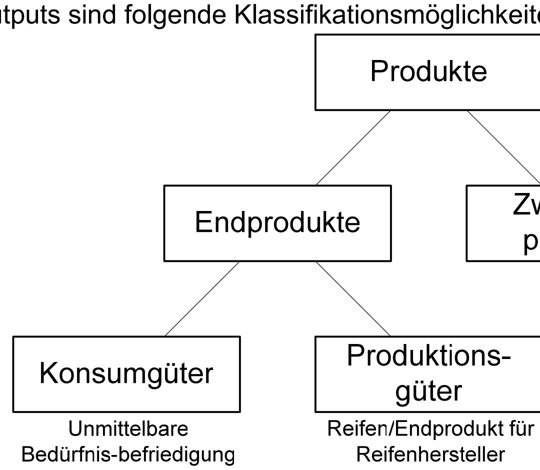
Zur Klassifikation der „Produktion":



In diese verschiedene Arten von Produktion gehen die Produktionsfaktoren als Input ein.



Hinsichtlich des Outputs sind folgende Klassifikationsmöglichkeiten gegeben:



Für die Durchführung einer Produktionsplanung müssen sowohl die Inputs als auch die Outputs formal dargestellt werden.

Für den <u>Input</u> bedeutet dies:
Es sind die verschiedenen Faktorarten in ihren jeweils erforderlichen Einsatzmengen zu qualifizieren.

<u>Beispiel:</u>

$r_1 = 100$ Tischplatten pro Tag

$r_2 = 400$ Tischbeine pro Tag

$r_3 = 10$ Liter Leim pro Tag

$r_m =$ von der Produktionsfaktorart m eingesetzte Menge

Verallgemeinerung:

$r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$ als Faktoreinsatzmengenvektor

$\Rightarrow r = \begin{pmatrix} r_1 \\ ... \\ r_M \end{pmatrix}$ mit M als Anzahl der erforderlichen Faktorarten

Dabei wird r_m gemessen in $[\mathrm{FE}]/[\mathrm{PZE}]$ (Faktoreinheiten pro Planungszeiteinheit)

Beispiel: [Liter]/[Tag] $\Rightarrow$ Liter pro Tag

Der Index von m läuft von 1 in Einer-Schritten bis M :

$$m = 1(1)M$$

Für den Output einer Produktion lässt sich ein so genannter Ausbringungsmengenvektor formalisieren:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_N \end{pmatrix}$$

Beispiel: $N = 4$

$$x = \begin{pmatrix} \text{20 Tische, Höhe 65cm, pro Tag} \\ \text{30 Tische, Höhe 70cm, pro Tag} \\ \text{35 Tische, Höhe 75cm, pro Tag} \\ \text{15 Tische, Höhe 80cm, pro Tag} \end{pmatrix}$$

Verallgemeinerung:

x_n: von der Produktart n ausgebrachte Menge, gemessen in $[PE]/[PZE]$ (Produkteinheit pro Planungszeiteinheit).

Für den Index n gilt:

$n = 1(1)N$

Diese beiden Vektoren r und x werden im Rahmen von Produktionsplanungen zusammengeführt und zwar zu einem so genannten „Produktionspunkt“:

$$y = \begin{pmatrix} -r \\ +x \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \text{ hier geht etwas raus} \\ \rightarrow \text{ hier geht etwas rein} \end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -r_1 \\ \dots \\ -r_m \\ +x_1 \\ \dots \\ +x_n \end{pmatrix}$$

($y :=$ Produktionspunkt)

Das negative Vorzeichen ist für die Faktoreinsatzmengen gewählt worden, weil die Inputs in der Regel zu Auszahlungen führen, die Outputs zu Einzahlungen.

Beispiel:

Hergestellt werden sollen 50 Tische pro Tag, Höhe 70cm
50 Tische pro Tag, Höhe 80cm

Wie lautet der zugehörige Produktionspunkt?

$$y = \begin{pmatrix} -r \\ +x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \text{-100 Tischplatten pro Tag} \\ \text{-200 Tischbeine (70 cm) pro Tag} \\ \text{-200 Tischbeine (80 cm) pro Tag} \\ \text{-10 Liter Leim pro Tag} \\ \text{+50 Tische (70 cm) pro Tag} \\ \text{+50 Tische (80 cm)pro Tag} \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe derartiger Produktionspunkte lässt sich die Produktionsplanung problemlos durchführen. Ziel aus mengenorientierter Sicht ist es,

- einen gegebenen Output mit möglichst geringem Input oder
- einen möglichst hohen Output mit einem gegebenen Input zu erstellen.

Erreichbar ist dieses Ziel durch einen Vergleich von Produktionspunkten, wobei effiziente von nicht-effizienten Produktionspunkten zu trennen sind. Die Suche nach effizienten und nicht effizienten Produktionspunkten ist Gegenstand von Kapitel 2.

2. Technologien

Ausgang:

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} -\underline{r} \\ +\underline{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_1 \\ -r_2 \\ \vdots \\ -r_{11} \\ +x_1 \\ +x_2 \\ \vdots \\ +x_n \end{pmatrix}$$

Eine Menge von Produktionspunkten, die technisch realisierbar sind, heißt Technologie(menge).

Beispiel: $\underline{y} = \begin{pmatrix} -\cdots \\ -\cdots \\ -400 \text{ Reifen} \\ -\cdots \\ +\cdots \\ +100 \text{ PKW} \end{pmatrix}$

Dagegen ist technisch nicht realisierbar:

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} -\cdots \\ -\cdots \\ -402 \text{ Reifen} \\ -\cdots \\ +\cdots \\ +100{,}5 \text{ PKW} \end{pmatrix}$$

Produktionspunkte mit ganz bestimmten Eigenschaften (z.B. festes Input-Output-Verhältnis) werden zu so genannten Produktionsprozessen (z.B. linearen) zusammengefasst.
Unter allen möglichen Produktionspunkten ist es sinnvoll diejenigen auszuwählen, die andere Produktionspunkte dominieren. Dies ist messbar durch das „Effizienzkriterium“.

(1) Input-Effizienz

Input-effiziente Produktionspunkte unterscheiden sich von input-ineffizienten dadurch, dass letztere im Vergleich zu ersteren bei gegebenen Output für <u>mindestens</u> eine Faktorart einen höheren Input erfordern.

<u>Beispiel:</u>

$$\underline{y}_1 = \xcancel{\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -3 \\ +\underline{x}^0 \end{pmatrix}},\ \underline{y}_2 = \xcancel{\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -4 \\ +\underline{x}^0 \end{pmatrix}},\ \underline{y}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \\ +\underline{x}^0 \end{pmatrix},\ \underline{y}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \\ +\underline{x}^0 \end{pmatrix}$$

Welche(r) Produktionspunkt(e) ist/sind input-effizient?

$\underline{y}_1$ wird dominiert von $\underline{y}_4$.

$\underline{y}_2$ wird dominiert von $\underline{y}_4$.

$\underline{y}_3$ und $\underline{y}_4$ sind input-effizient.

(2) Output-Effizienz

Output-effiziente Produktionspunkte unterscheiden sich von output-ineffizienten dadurch, dass letztere im Vergleich zu ersteren bei gegebenen Input für <u>mindestens</u> eine Produktionsart einen geringeren Output liefern.

<u>Beispiel:</u>

$$\underline{y}_1 = \begin{pmatrix} -\underline{r}^0 \\ +5 \\ +7 \\ +3 \end{pmatrix},\ \underline{y}_2 = \xcancel{\begin{pmatrix} -\underline{r}^0 \\ +6 \\ +4 \\ +2 \end{pmatrix}},\ \underline{y}_3 = \xcancel{\begin{pmatrix} -\underline{r}^0 \\ +4 \\ +6 \\ +2 \end{pmatrix}},\ \underline{y}_4 = \begin{pmatrix} -\underline{r}^0 \\ +7 \\ +5 \\ +3 \end{pmatrix}$$

$\underline{y}_3$ wird dominiert von $\underline{y}_1$.

$\underline{y}_2$ wird dominiert von $\underline{y}_4$.

$\underline{y}_1$ und $\underline{y}_4$ sind output-effizient.

(3) Effizienz

Effiziente Produktionspunkte unterscheiden sich von ineffizienten dadurch, dass letztere im Vergleich zu ersteren höhere Inputs gleichen oder niedrigeren Outputs und/oder geringere Outputs bei gleichen oder höheren Inputs aufweisen.

<u>Beispiel:</u>

$$\underline{y}_1 = \xcancel{\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -5 \\ +4 \\ +3 \end{pmatrix}},\ \underline{y}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -4 \\ +3 \\ +3 \end{pmatrix},\ \underline{y}_3 = \xcancel{\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -5 \\ +4 \\ +2 \end{pmatrix}},\ \underline{y}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -4 \\ +4 \\ +3 \end{pmatrix}$$

$\underline{y}_3$ wird von $\underline{y}_1$ dominiert.

$\underline{y}_1$ wird von $\underline{y}_4$ dominiert.

$\underline{y}_2$ und $\underline{y}_4$ sind effizient

Ehemalige Klausuraufgabe

Gegeben sind als Produktionspunkte:

$$\underline{y}_1 = \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ +3 \\ +4 \end{pmatrix}, \underline{y}_2 = \begin{pmatrix} -10 \\ -30 \\ +2 \\ +1 \end{pmatrix}, \underline{y}_3 = \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ +3 \\ +2 \end{pmatrix}, \underline{y}_4 = \begin{pmatrix} -20 \\ -30 \\ +3 \\ +4 \end{pmatrix}, \underline{y}_5 = \begin{pmatrix} -20 \\ -10 \\ +4 \\ +3 \end{pmatrix}$$

$\underline{y}_2$ wird dominiert von $\underline{y}_1$.

$\underline{y}_3$ wird dominiert von $\underline{y}_1$.

$\underline{y}_4$ wird dominiert von $\underline{y}_1$.

$\underline{y}_1$ und $\underline{y}_5$ sind effizient

3. Bewertung von Gütern

Rein mengenmäßig ist vielfach nicht zu entscheiden, welcher Produktionspunkt welchen anderen dominiert.

(1) Bewertung der Faktoreinsatzmengen (Inputs)

r_m : Einsatzmenge von Produktionsfaktorart m, in [FE]/[PZE]

q_m : Einsatzpreis von Produktionsfaktorart m, in [GE] (Geldeinheiten)/[FE]

$m = 1(1)M$

Die bewerteten Verbräuche (=Einsatzmengen) aller M Faktorarten ergeben in ihrer die Summe der Gesamtkosten:

$$K = \sum_{m=1}^{M} q_m \cdot r_m$$

$$\frac{[\mathrm{GE}]}{[\mathrm{FE}]} \cdot \frac{[\mathrm{FE}]}{[\mathrm{PZE}]}$$

Ziel: Kartenminimierung
Beispiel:

$$\underline{y}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -3 \\ -5 \\ +\underline{x}_0 \end{pmatrix}, \underline{y}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \\ -6 \\ +\underline{x}_0 \end{pmatrix}, \underline{y}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -4 \\ -4 \\ +\underline{x}_0 \end{pmatrix}$$

$q_1 = 10$, $q_2 = 30$, $q_3 = 40$, $q_4 = 20$

Zu bestimmen ist der kostenminimale Produktionspunkt.

$$K_1 = 10 \cdot 2 + 30 \cdot 4 + 40 \cdot 3 + 20 \cdot 5 = 360$$

$$K_2 = 300$$

$$K_3 = 330$$

$\Rightarrow \underline{y}_2$ ist kostenminimal!

(2) Bewertung der Produktausbringungsmengen (Outputs)

x_n: Ausbringungsmenge von Produktart n, in [PE]/[PZE]
p_n: Stückerlös von Produktart n, in [GE]/[PE]

$\left.\right\} n = 1(1)N$

In ihrer Summe ergeben die bewerteten Outputs die Gesamterlöse:

$$E = \sum_{n=1}^{N} p_n \cdot x_n$$

Ziel: Erlösmaximierung (Pendant: Output-Effizienz)

Beispiel:

$$\underline{y}_1 = \begin{pmatrix} -\underline{r}^0 \\ +3 \\ +5 \\ +4 \end{pmatrix}, \; \underline{y}_2 = \begin{pmatrix} -\underline{r}^0 \\ +4 \\ +6 \\ +3 \end{pmatrix}, \; \underline{y}_3 = \begin{pmatrix} -\underline{r}^0 \\ +3 \\ +4 \\ +4 \end{pmatrix}, \; \underline{y}_4 = \begin{pmatrix} -\underline{r}^0 \\ +4 \\ +6 \\ +4 \end{pmatrix}$$

$p_1 = 20$
$p_2 = 10$
$p_3 = 30$

Ermitteln Sie den erlösmaximalen Produktionspunkt.

$E_1 = 20 \cdot 3 + 10 \cdot 5 + 30 \cdot 4 = 230$
$E_2 = 230$
$E_3 = 220$
$E_4 = 260$
$\Rightarrow \underline{y}_4$ ist der erlösmaximale Produktionspunkt

(3) Bewertung der Faktoreinsatz- und Produktausbringungsmengen

$$G = E - K$$
$$= \sum_{n=1}^{N} p_n \cdot x_n - \sum_{m=1}^{M} q_m \cdot r_m$$

Ziel: Gewinnmaximierung
Beispiel:

$$\underline{y}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ +3 \\ +5 \\ +4 \\ +6 \end{pmatrix}, \ \underline{y}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ +3 \\ +4 \\ +3 \\ +7 \end{pmatrix}, \ \underline{y}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ +3 \\ +5 \\ +5 \\ +6 \end{pmatrix}$$

$q_1 = 50$, $q_2 = 20$

$p_1 = 30$, $p_2 = 10$, $p_3 = 20$, $p_4 = 10$

$G_1 = 30 \cdot 3 + 10 \cdot 5 + 20 \cdot 4 + 10 \cdot 6 - 50 \cdot 2 - 20 \cdot 4 = +100$

$G_2 = +10$

$G_3 = +140$

Gewinnmaximal ist Produktionspunkt $\underline{y}_3$.

4. Produktionsplanung auf der Grundlage von Leontief-Technologien

4.1 Lineare Beziehungen zwischen Inputs und Outputs

Alle diejenigen Produktionspunkte, bei denen eine Ver-λ-fachung der Einsatzmengen aller Inputs zu einer Ver-λ-fachung der Ausbringungsmengen aller Outputs führt, gehört zu einem <u>linearen</u> Prozess.

<u>Formal:</u>

$$Y = \left\{ \underbrace{y \mid}_{} y = \lambda \cdot y^0 ; \lambda \geq 0 \right\}$$

linearer Prozess „Menge von Produktionspunkten, für die gilt…" „Basisproduktionspunkt"

<u>Beispiel:</u>

$$Y = \left\{ \underline{y} \mid \underline{y} = \lambda \cdot \underline{y}^0 = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ +4 \\ +2 \end{pmatrix} ; \lambda \geq 0 \right\}$$

Zu diesem linearen Prozess gehören z.B. folgende Produktionspunkte:

(a) $\lambda_1 = 0,5 \Rightarrow \underline{y}_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ +2 \\ +1 \end{pmatrix}$

(b) $\lambda_2 = 2 \Rightarrow \underline{y}_2 = \begin{pmatrix} -20 \\ -40 \\ +8 \\ +4 \end{pmatrix}$

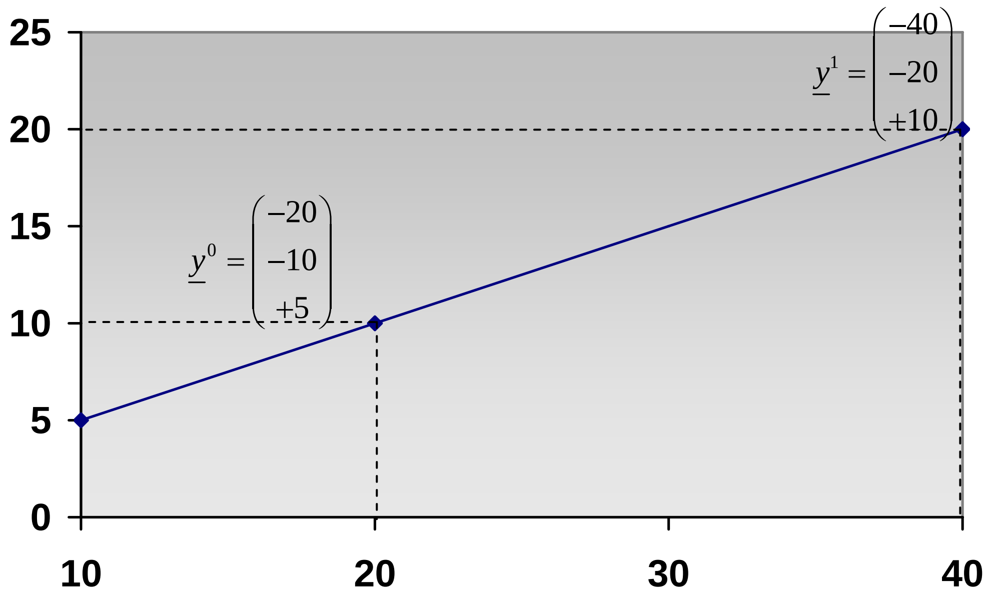
(c) $\lambda_3 = 0,3 \Rightarrow \underline{y}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ +1,2 \\ +0,6 \end{pmatrix}$

Produktionspunkte linearer Prozesse, die technisch realisierbar sind, gehören zur <u>linearen</u> Technologie(menge).
Sind im Falle linearer Technologien die Einsatzmengen mindestens einer Faktorart beschränkt, dann liegt eine <u>Leontief-Technologie</u> vor.
Wenn die Produktionsplanung grafisch erfolgen soll, sind nur zwei Faktorarten als Inputs und eine Produktart als Output möglich.

Beispiel:

$$Y = \left\{ \underline{y} \mid \underline{y} = \lambda \cdot \underline{y}^0 = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ -10 \\ +5 \end{pmatrix}; \lambda \geq 0 \right\}$$

Dieser lineare Prozess lässt sich grafisch wie folgt darstellen:



4.2 Mengenorientierte Planung (d.h. die Inputs und Outputs werden ohne Berücksichtigung von Kosten und Erlösen geplant.)

(a) Vernachlässigung von Faktorbeschränkungen (Lineare Technologien)

Es wird im Folgenden unterschieden zwischen

- reinen linearen Prozessen
  $Y = \left\{ \underline{y} \mid \underline{y} = \lambda \cdot \underline{y}^0; \lambda \geq 0 \right\}$
  und
- gemischten linearen Prozessen
  $Y = \left\{ \underline{y} \mid \underline{y} = \lambda \cdot \underline{y}^g; \lambda \geq 0 \right\}$
  mit $\underline{y}^g = c_i \cdot \underline{y}_i^0 + c_j \cdot \underline{y}_j^0$,
  wobei $\underline{y}_i^0$ und $\underline{y}_j^0$ die Basisproduktionspunkte der Prozesse i und j sind
  und c_i und c_j die Anteile kennzeichnen, zu denen die Prozesse i und j an der Herstellung der Outputs beteiligt sind.
  Beachte: $c_i > 0, c_j > 0, c_i + c_j = 1$

Beispiel:

$$Y_1 = \left\{ \underline{y} \mid \underline{y} = \lambda \cdot \underline{y}_1^0 = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ +5 \end{pmatrix}; \lambda \geq 0 \right\}$$

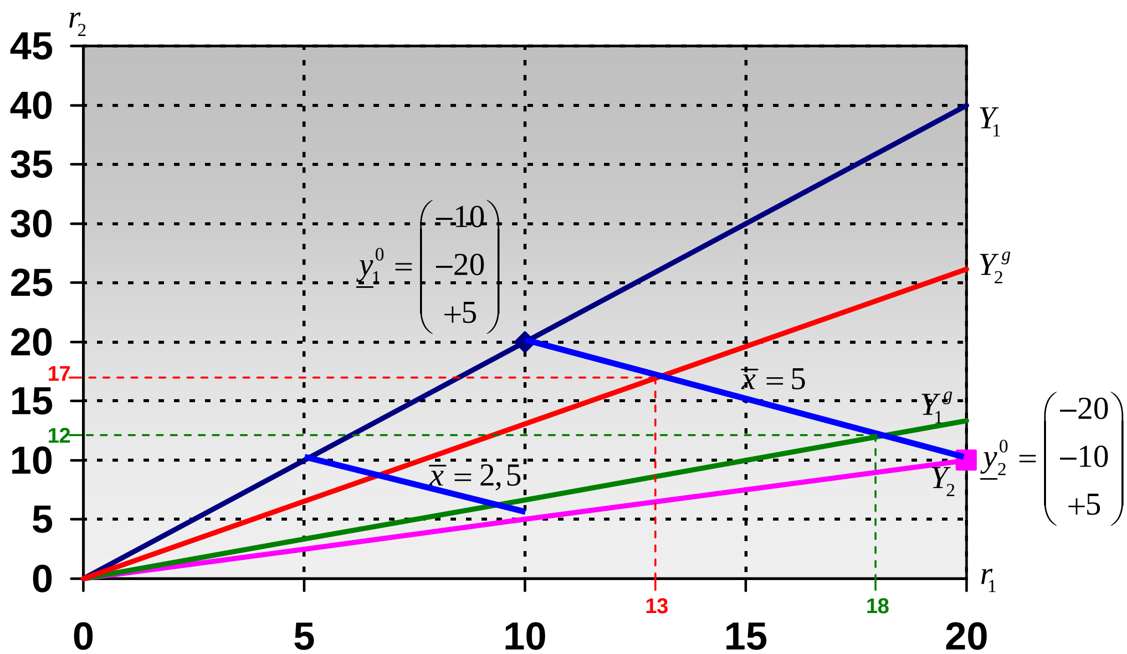
$$Y_2 = \left\{ \underline{y} \mid \underline{y} = \lambda \cdot \underline{y}_2^0 = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ -10 \\ +5 \end{pmatrix}; \lambda \geq 0 \right\}$$

Beide Prozesse sollen gemischt werden:

(1) $c_1 = 0,20$ und $c_2 = 0,80$

(2) $c_1 = 0,70$ und $c_2 = 0,30$

Grafische Darstellung der Prozesse 1 und 2 sowie der beiden Mischungen.



(1) $Y_1^g = \left\{ \underline{y} \mid \underline{y} = \lambda \cdot \underline{y}_1^g; \lambda \geq 0 \right\}$ mit $\underline{y}_1^g = 0,20 \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ +5 \end{pmatrix} + 0,80 \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ -10 \\ +5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -12 \\ +5 \end{pmatrix}$

(2) $Y_2^g = \left\{ \underline{y} \mid \underline{y} = \lambda \cdot \underline{y}_2^g; \lambda \geq 0 \right\}$ mit $\underline{y}_2^g = 0,70 \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ +5 \end{pmatrix} + 0,30 \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ -10 \\ +5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ -17 \\ +5 \end{pmatrix}$

Die Verbindungslinie aller Faktormengenkombinationen, die zu einem identischen Output führen, heißt Produktisoquante. Bei linearen Prozessen verlaufen alle Produktionsquanten zueinander parallel.

(b) Berücksichtigung von Faktormengenbeschränkungen (Leontief-Technologien)

<u>Problemstellung:</u>
Welcher Output ist unter Einsatz welcher Inputs maximal herstellbar, wenn mindestens eine Inputart durch eine gegebenen Vorrat beschränkt ist?

<u>Beispiel:</u>

$$Y_1 = \left\{ \underline{y} \mid \underline{y} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ +5 \end{pmatrix}; \lambda \geq 0 \right\}$$

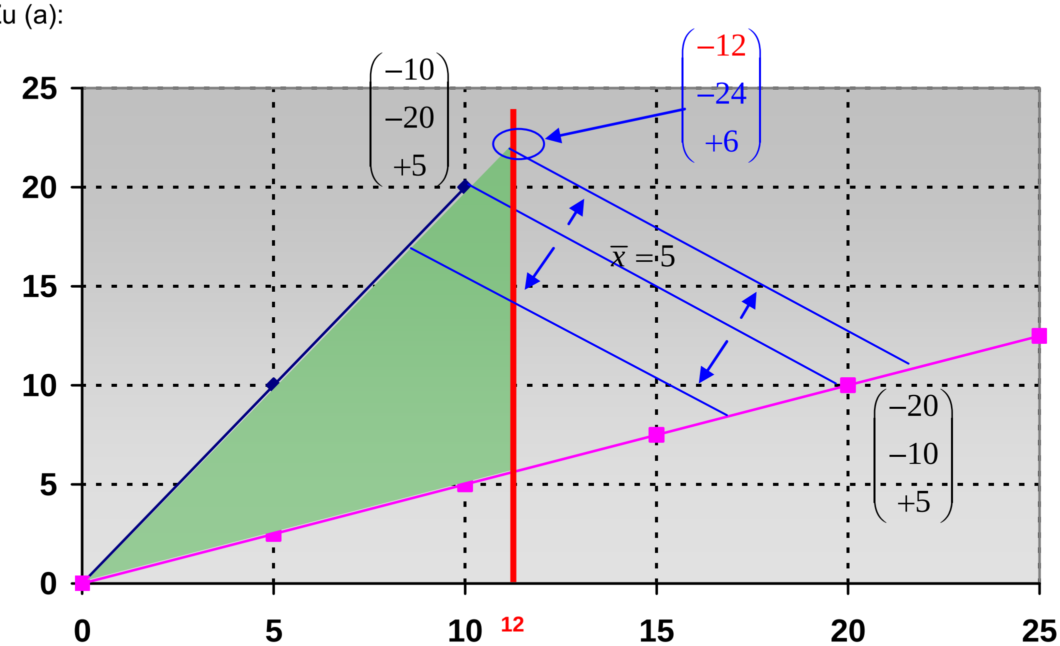
$$Y_2 = \left\{ \underline{y} \mid \underline{y} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ -10 \\ +5 \end{pmatrix}; \lambda \geq 0 \right\}$$

(a) $\overline{r}_1 = 12$

(b) $\overline{r}_2 = 14$

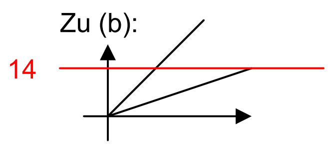
(c) $\overline{r}_1 = 14$ und $\overline{r}_2 = 10$

Grafische Lösung:
Zu (a):



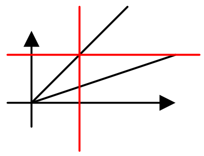
$x_{\max} = 6$

Zu (b):



$x_{\max} = 7$

Zu (c):



$x_{\max} = 4$

4.3 Kostenorientierte Planung

4.3.1 Vernachlässigung von Faktormengenbeschränkungen

a) Kostenminimierung bei gegebenem Output

<u>Problemstellung:</u>
Welcher von verschiedenen linearen Prozessen ist einzusetzen, wenn ein gegebener Output kostenminimal herzustellen ist?

<u>Beispiel:</u> Gegeben sind

$$Y_1 = \left\{ \underline{y} \mid \underline{y} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ +5 \end{pmatrix}; \lambda \geq 0 \right\}$$

$$Y_2 = \left\{ \underline{y} \mid \underline{y} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ -6 \\ +3 \end{pmatrix}; \lambda \geq 0 \right\}$$

Die Faktorpreise betragen:

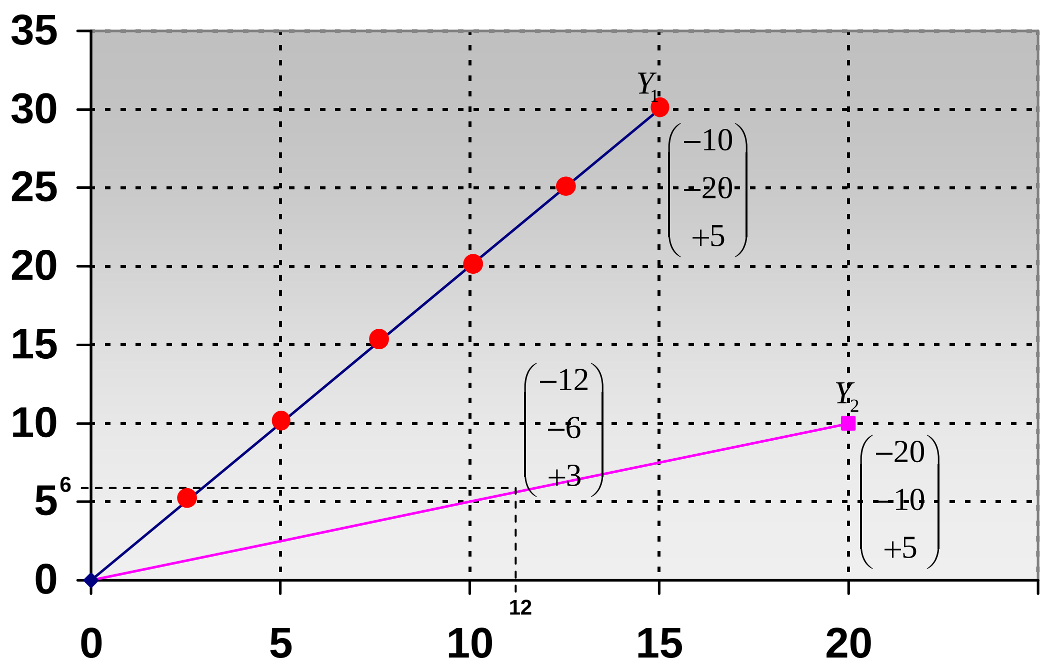
$q_1 = 1{,}00 \frac{[\text{GE}]}{[\text{FE}]}$, $q_2 = 0{,}50 \frac{[\text{GE}]}{[\text{FE}]}$.

Welcher Prozess ist kostenminimal?
Zu bestimmen sind die Stückkosten der beiden linearen Prozesse:

$$k_1 = 1{,}00 \frac{[\text{GE}]}{[\text{FE}]} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{10}{5}}}{2} \frac{[\text{FE}]}{[\text{PE}]} + 0{,}50 \frac{[\text{GE}]}{[\text{FE}]} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{20}{5}}}{4} \frac{[\text{FE}]}{[\text{PE}]} = \underline{\underline{4 \frac{[\text{GE}]}{[\text{PE}]}}}$$

$$k_2 = 1{,}00 \cdot 4 + 0{,}50 \cdot 2 = \underline{\underline{5}}$$

y_1 ist kostenminimal!
Diese Aussage gilt für jeden beliebigen Output – wegen der Linearität der Prozesse.



Die Kombination von Faktoreinsatzmengen (Z.B. $r_1 = 10$ und $r_2 = 20$), die einen gegebenen Output (i.B. $x = 5$) zu minimalen Kosten erzeugt, heißt „Minimalkostenkombination". Die Verbindungslinie der zu unterschiedlichen Outputs gehörenden „Minimalkostenkombinationen heißt Minimalkostenpfad".

b) Outputmaximierung bei gegebenem Kostenbudget

Problem:
Welcher Output ist mit welcher Faktormengenkombination durch welchen Prozess maximal herstellbar, wenn ein Kostenbudget vorgegeben ist?

Beispiel:

$$Y_1 = \left\{ \underline{y} \mid \underline{y} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -12 \\ +4 \end{pmatrix}; \lambda \geq 0 \right\}$$

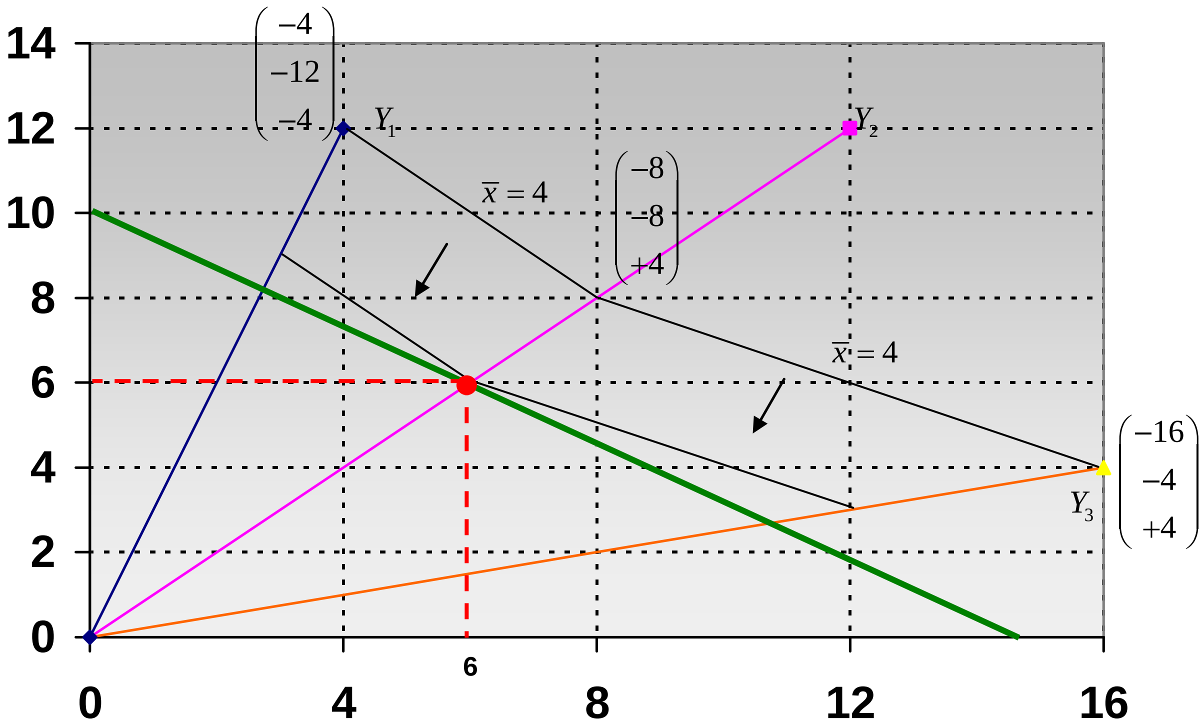
$$Y_2 = \left\{ \underline{y} \mid \underline{y} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ +4 \end{pmatrix}; \lambda \geq 0 \right\}$$

$$Y_3 = \left\{ \underline{y} \mid \underline{y} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -16 \\ -4 \\ +4 \end{pmatrix}; \lambda \geq 0 \right\}$$

Faktorpreise: $q_1 = 20$, $q_2 = 30$

Kostenbudget: $\bar{K} = 300$

Bestimmen Sie das Outputmaximum!



Zum Kostenbudget von 300 führt folgende Gerade:

$20 \cdot r_1 + 30 \cdot r_2 = 300$

$\Leftrightarrow r_2 = -\frac{2}{3} \cdot r_1 + 10$

Faktormengenkombination die bei gegebenem Budget von 300 zum maximalen Output führt.

Hier: $r_1^* = 6$ und $r_2^* = 6$

Maximaler Output $x^* = \underline{\underline{3}}$ (herzustellen mit dem Prozess Y_2)

4.3.2 Berücksichtigung von Faktormengenbeschränkungen

Welcher Output ist mit welcher Faktormengenkombination durch welchen Prozess kostenminimal herstellbar, wenn der Vorrat mindestens einer Faktorart beschränkt ist?

Beispiel:

$$Y_1 = \left\{ \underline{y} \mid \underline{y} = \lambda \cdot \begin{pmatrix}-10\\-20\\+5\end{pmatrix}; \lambda \geq 0 \right\}$$

$$Y_2 = \left\{ \underline{y} \mid \underline{y} = \lambda \cdot \begin{pmatrix}-20\\-10\\+5\end{pmatrix}; \lambda \geq 0 \right\}$$

1. 1. $\bar{r}_1 = 12$

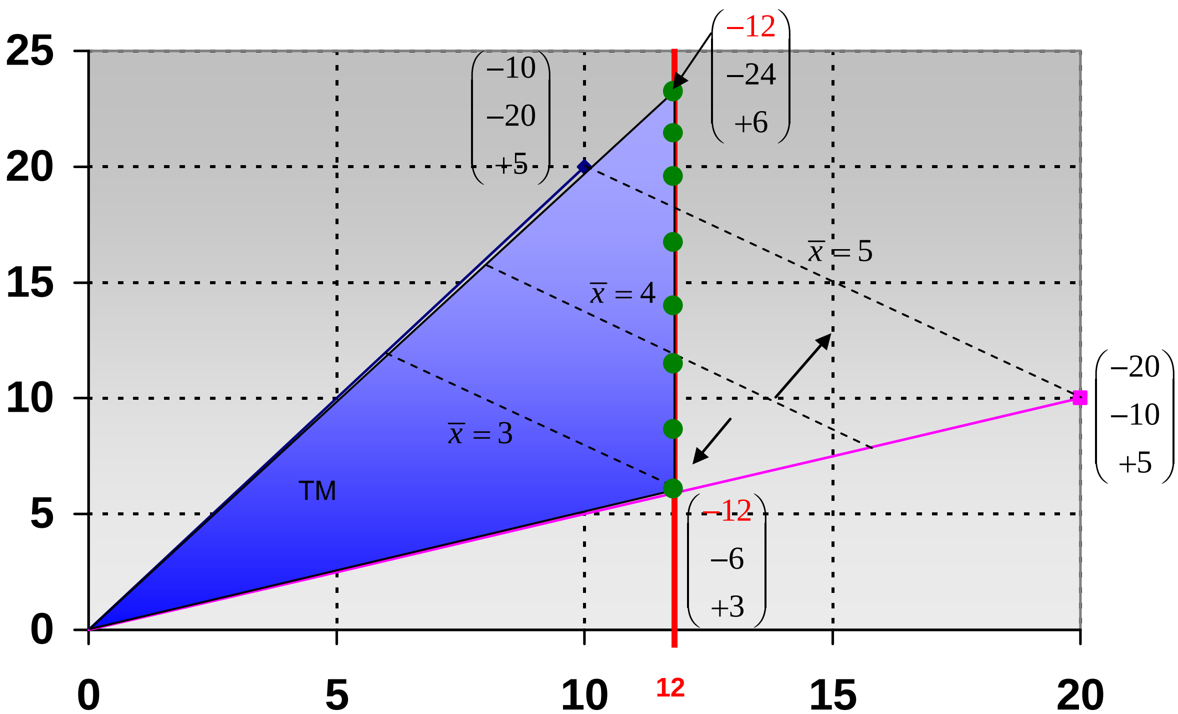
$q_1 = 0,50$ und $q_2 = 1,00$

Stückkostenvergleich:

$k_1 = 0,50 \cdot \frac{10}{5} + 1,00 \cdot \frac{20}{5} = \underline{\underline{5}}$

$k_2 = 0,50 \cdot \frac{20}{5} + 1,00 \cdot \frac{10}{5} = \underline{\underline{4}}$

$\Rightarrow Y_2$ ist der kostenminimale Prozess!

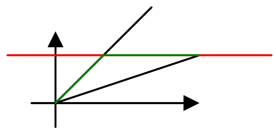


Ergebnis: Für $0 \leq \bar{x} \leq 3$ ist der reine Prozess Y_2 einzusetzen. Für $3 \leq \bar{x} \leq 6$ ist eine Mischung aus Y_1 und Y_2 einzusetzen. Für $\bar{x} = 6$ ist der reine Prozess Y_1 einzusetzen. Mehr als $\bar{x} = 6$ ist mit Y_1 und Y_2 nicht herstellbar.

2. 2. $\overline{r}_2 = 16$

   $q_1 = 1,00$ und $q_2 = 0,50$

   Ergebnis: $k_1 = 4$ und $k_2 = 5$



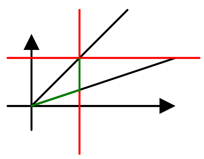
   $x_{\max} = \underline{\underline{8}}$

3. 3. $\overline{r}_1 = 16$ und $\overline{r}_2 = 14$

   $q_1 = 0,50$ und $q_2 = 1$

   Ergebnis:

   $k_1 = 5$ und $k_2 = 4$



   $x_{\max} = \underline{\underline{5}}$

5. Produktionsplanung auf der Grundlage von Gutenbergtechnologien

Unter einer Gutenbergtechnologie(menge) versteht man die Menge aller technisch realisierbaren Produktionspunkte, für die gilt, dass sich der Verbrauch einer Faktorart m (symbolisiert durch r_m) ergibt über folgende Multiplikatoren:

$$r_m = a_m \cdot X$$

$$\frac{[FE]}{[PZE]} = \frac{[FE]}{[PE]} \cdot \frac{[PE]}{[PZE]}$$

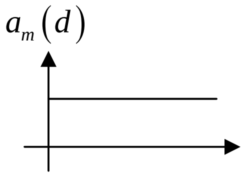
Dabei muss a_m nicht länger (wie in Kapitel 4) konstant sein. Im Folgenden kann a_m variieren, und zwar in Abhängigkeit von der Produktionsgeschwindigkeit (=Intensität) d .

$$\frac{[\mathrm{PE}]}{[\mathrm{ZE}]}$$

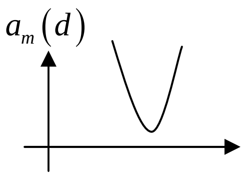
Gutenberg hat zuerst die Zusammenhänge von d und a_m untersucht. Daher heißen die Funktionen $a_m(d)$ Gutenberg-Verbrauchsfunktionen.

5.1 Gutenberg-Verbrauchsfunktionen

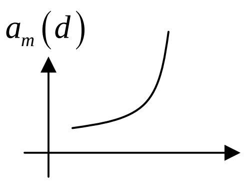
Folgende Verläufe von Gutenberg-Verbrauchsfunktionen sind festgelegt worden:



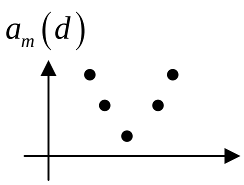
Beispiel: Materialverbrauch, z.B. 4 Reifen pro PKW



Beispiel: Betriebsstoffverbrauch



Beispiel: Werkzeugverschleiß



Beispiel: Betriebsstoffverbrauch bei diskreter Schaltung

Mit Hilfe derartiger Gutenberg-Verbrauchsfunktionen lässt sich die Produktionsplanung mengen- und kostenorientiert durchführen.

5.2 Mengenorientierte Planung

5.2.1 Vernachlässigung von Faktormengenbeschränkungen

Problemstellung:
Welche von unterschiedlich möglichen Produktionen (d.h. Produktionsgeschwindigkeiten) sind zu realisieren, wenn die Faktoreinsatzmengen minimiert werden sollen?
In der Regel ist diese Problemstellung nicht eindeutig lösbar. Man kann lediglich effiziente von ineffizienten Produktionen unterscheiden.

<u>Beispiel:</u>

$M = 3$ Faktorarten mit den folgenden GVFen:

$$a_1(d) = \frac{1}{10} \cdot d^2 - 4 \cdot d + 45$$

$$a_2(d) = \frac{1{,}6}{d}$$

$$a_3(d) = 10$$

Für d gilt folgendes Intervall: $d \in [10;30]$

Gesucht ist die Menge der effizienten Produktionen, d.h. die Menge derjenigen Produktionen, die einen Output unter $x = 1$ mit einem möglichst geringen Input erzeugen.
Zunächst werden die drei Inputs separat danach untersucht, für welche Intensität d der Verbrauch minimal wäre.

(1) $m = 1$

$$a_1(d) = \frac{1}{10}d^2 - 4 \cdot d + 45$$

Gesucht ist das Minimum!

$$a_1'(d) = \frac{1}{5} \cdot d - 4$$

$$\frac{1}{5} \cdot d_1^* - 4 \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow d_1^* = \underline{\underline{20}}$$

$$a_1''(d_1^*) = \frac{1}{5} > 0$$

$\Rightarrow d_1^* = 20$ führt zu einem Minimum!

(2) $m = 2$

$$a_2(d) = \frac{1,6}{d} = 1,6 \cdot d^{-1}$$

$$a_2'(d) = -1,6 \cdot d^{-2} = -\frac{1,6}{d^2}$$

< 0

$\Rightarrow$ $a_2(d)$ ist eine streng monoton fallende Funktion!

$\Rightarrow$ Das gesuchte Minimum liegt am rechten Rand des Definitionsbereichs $[10;30]$

$$\Rightarrow d_2^* = \underline{\underline{30}}$$

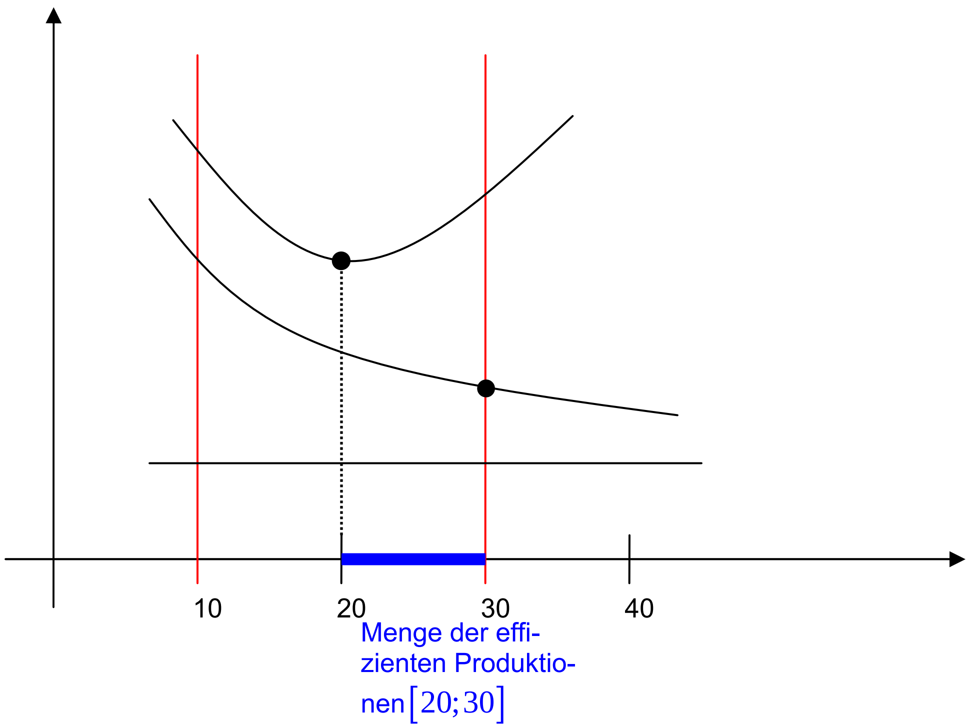
(3) (3) $m = 3$

$$a_3(d) = 10$$

$\Rightarrow$ Für alle $d \in [10;30]$ ist der Verbrauch identisch.

Welche Produktionen sind effizient?

Skizze:



Übungsaufgabe:

$$a_1(d) = \frac{1}{4} \cdot d^2 - 45d + 3000$$

$$a_2(d) = \frac{3}{8} \cdot d^2 - 48d + 2000$$

$$d \in [30;80]$$

Bestimmen Sie die Menge der effizienten Produktionen.

Menge: $d \in [64;80]$

5.2.2 Berücksichtigung von Faktormengenbeschränkungen

Problemstellung:
Welcher Output ist maximal herstellbar, wenn die Inputs der Faktorarten begrenzt sind?

<u>Beispiel:</u> $M = 3$

$$a_1(d) = \frac{1}{10} \cdot d^2 - 4 \cdot d + 45$$

$$a_2(d) = \frac{1,6}{d}$$

$$d_3(d) = 10$$

Begrenzte Faktorvorräte:

$$\overline{r}_1 = 1200 \text{ [FEJ]/[PZE]}$$

$$\overline{r}_2 = 10$$

$$\overline{r}_3 = 1500$$

Wie lautet X_{max}, wenn $\overline{d} = 25$ gegeben ist?

Für $\overline{d} = 25$ ergeben sich folgende Faktorverbräuche pro Stück:

$$\begin{aligned} a_1(d_1 = 25) &= \frac{1}{10} \cdot 25^2 - 4 \cdot 25 + 45 \\ &= 62,5 - 100 + 45 \\ &= \underline{\underline{7,5}} \text{ [FE]/[PE]} \end{aligned}$$

$$a_2(\overline{d} = 25) = \frac{1,6}{25} = \underline{\underline{0,064}}$$

$$a_3(\overline{d} = 25) = \underline{\underline{10}}$$

Mit Hilfe der gegebenen Faktorvorräte $\overline{r}_m$ und der ermittelten Faktorverbräuche pro Stück $a_m(\overline{d})$ lassen sich die <u>jeweils</u> maximal herstellbaren Outputs durch folgende Quotienten ermitteln:

$$\frac{\overline{r}_m}{a_m(\overline{d})}$$

Hier:

$$m = 1: \frac{1200 \text{ [FE]/[PZE]}}{7,5 \text{ [FE]/[PE]}} = 160 \frac{\text{[PE]}}{\text{[PZE]}}$$

$$m = 2: \frac{10}{0,064} = \underline{\underline{156,25}}$$

$$m = 3: \frac{1500}{10} = \underline{\underline{150}}$$

Als maximaler Output ist somit erzeugbar:

$$X_{\max} = \min_{m=1}^{M} \frac{\bar{r}_m}{a_m\left(\bar{d}\right)}$$
$$= \min\left\{160; 156,25; 150\right\}$$
$$= \underline{\underline{150}}$$

Die begrenzende Faktorart ist $M = 3$!

<u>Zusatzfragen:</u>

(a) Ermitteln Sie für alle drei Faktorarten die Restmengen, wenn $X_{\max} = 150$ hergestellt wird!

(b) Welche Auswirkungen hätte eine Verdoppelung von
   (b1) $\bar{r}_1$
   (b2) $\bar{r}_3$
   auf $X_{\max}$?

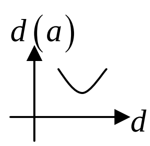
Zu (a): Reste $m = 1 : 75$
$m = 2 : 0,4$
$m = 3 : 0$

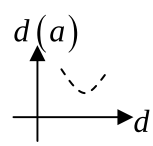
Zu (b): (b1) keine!
(b2) $X_{\max}^{\text{neu}} = 156,25$

5.3 Kostenorientierte Planung

<u>Annahmen:</u>

- gegebene Gutenberg-Verbrauchsfunktionen
- gegebene Faktorpreise versus diskret





- stetig variierbare Intensitäten
- Gegebener Definitionsbereich für die Intensitäten
- begrenzte Einsatzzeit des Produktionssystems

<u>Problemstellung:</u>

Welche Produktionsweise (d.h. welcher Einsatz welcher Intensitäten) gewährleistet, dass welche Produktionsmengen jeweils zu minimalen Kosten erzeugt werden?

<u>Beispiel:</u>

Zwei Faktorarten werden zur Herstellung eines Problems eingesetzt:

$m = 1$: $q_1 = 10[\text{GE}]/[\text{FE}]$

$a_1\left(d\right) = \frac{1}{10} \cdot d^2 - 4 \cdot d + 45$, gemessen in $[\text{FE}]/[\text{PE}]$

$m = 2$: $q_2 = 8[\text{GE}]/[\text{FE}]$

$a_2\left(d\right) = \frac{1}{2} \cdot d^2 - 14 \cdot d + 100$, in $[\text{FE}]/[\text{PE}]$

Dabei gilt für die Intensität $d \in [10; 20]$.

Maximale Einsatzzeit des Produktionssystems: $T = 5[\mathrm{ZE}]/[\mathrm{PZE}]$

Gesucht ist diejenige Funktion, die unterschiedlichen Outputs x die jeweils minimalen Gesamtkosten zuordnet.

Zunächst werden die minimalen Stückkosten bestimmt.

Für die Funktion der Stückkosten gilt:

$$k(d) = \underset{\frac{[\mathrm{GE}]}{[\mathrm{FE}]}}{q_1} \cdot \underset{\frac{[\mathrm{FE}]}{[\mathrm{PE}]}}{a_1(d)} + \underset{\frac{[\mathrm{GE}]}{[\mathrm{FE}]}}{q_2} \cdot \underset{\frac{[\mathrm{FE}]}{[\mathrm{PE}]}}{a_2(d)}$$

$$= 10 \cdot \left(\tfrac{10}{1} \cdot d^2 - 4 \cdot d + 45\right)$$

$$= 8 \cdot \left(\tfrac{1}{2} \cdot d^2 - 14 \cdot d + 100\right)$$

$$= 5d^2 - 152d + 1250$$

Minimierung dieser Stückkostenfunktion:

$$k'(d) = 10d - 152$$

$$10d^* - 152 \overset{!}{=} 0$$

$$d^* = \underline{\underline{15,2}}$$

$$k''(d) = 10 > 0$$

$\Rightarrow$ Minimum!

Wegen $d^* = 15,2 \in [10; 20]$ lauten die minimalen Stückkosten:

$$k(d^*) = 5 \cdot (12,5)^2 - 152 \cdot 15,2 + 1250$$

$$= \underline{\underline{94,8}}$$

Die minimalen Gesamtkosten betragen:

$K(\bar{x}) = 94,8 \cdot \bar{x}$, wobei $d^* = \underset{\frac{[\mathrm{PE}]}{[\mathrm{FE}]}}{15,2}$ ist.

Dabei ist als Intervall der Einsatzzeit $[0; 5]$ möglich. Daher kann man als Output mit $d^* = 15,2$ nur erzeugen:

$$0 \le \bar{x} \le 76$$

$$0\frac{[\mathrm{ZE}]}{[\mathrm{PZE}]} \cdot 15,2\frac{[\mathrm{PE}]}{[\mathrm{ZE}]} \qquad 5\frac{[\mathrm{ZE}]}{[\mathrm{PZE}]} \cdot 15,2\frac{[\mathrm{PE}]}{\mathrm{ZE}}$$

Wenn aber $\bar{x} > 76$ hergestellt werden soll, dann muss die Intensität von $15,2$ (auf bis zu 20) erhöht werden.

<u>Beispiel:</u> $\overline{x} = 80 \Rightarrow d = \frac{90}{5} = 16$

$$\overline{x} = 90 \Rightarrow d = \tfrac{90}{5} = 18$$

$$\underset{x_{\max}}{\overline{x}} = 100 \Rightarrow d = \tfrac{100}{5} = \underset{d_{\max}}{20}$$

Für das Intervall $76 < \overline{x} \leq 100$ lauten die Stückkosten:

$$k\left(d = \tfrac{\overline{x}}{5}\right) = 5 \cdot d^2 - 152 \cdot d + 1250$$
$$= 5 \cdot \left(\tfrac{\overline{x}}{5}\right)^2 - 152 \cdot \left(\tfrac{\overline{x}}{5}\right) + 1250$$
$$= 0{,}2\overline{x}^2 - 30{,}4\overline{x} + 1250$$

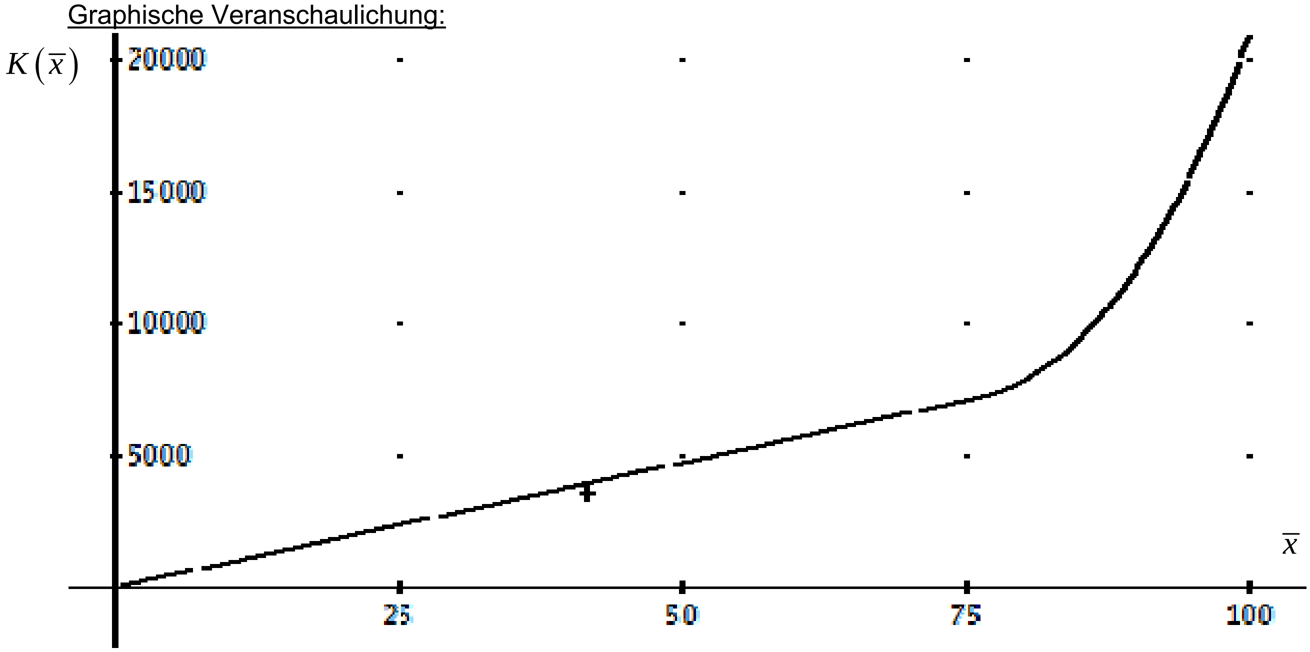
Die Gesamtkosten für $76 < \overline{x} \leq 100$ lauten:

$$K\left(\overline{x}\right) = k\left(d = \tfrac{\overline{x}}{5}\right) \cdot \overline{x}$$
$$= 0{,}2\overline{x}^3 - 30{,}4\overline{x}^2 + 1250\overline{x}$$

<u>Lösung:</u>

$$K\left(\overline{x}\right) \begin{cases} 94{,}8 \cdot \overline{x}\text{, wenn } 0 \leq \overline{x} \leq 76 \\ 0{,}2\overline{x}^3 - 30{,}4\overline{x}^2 + 1250\overline{x}\text{, wenn } 76 \leq \overline{x} \leq 100 \end{cases}$$

<u>Graphische Veranschaulichung:</u>



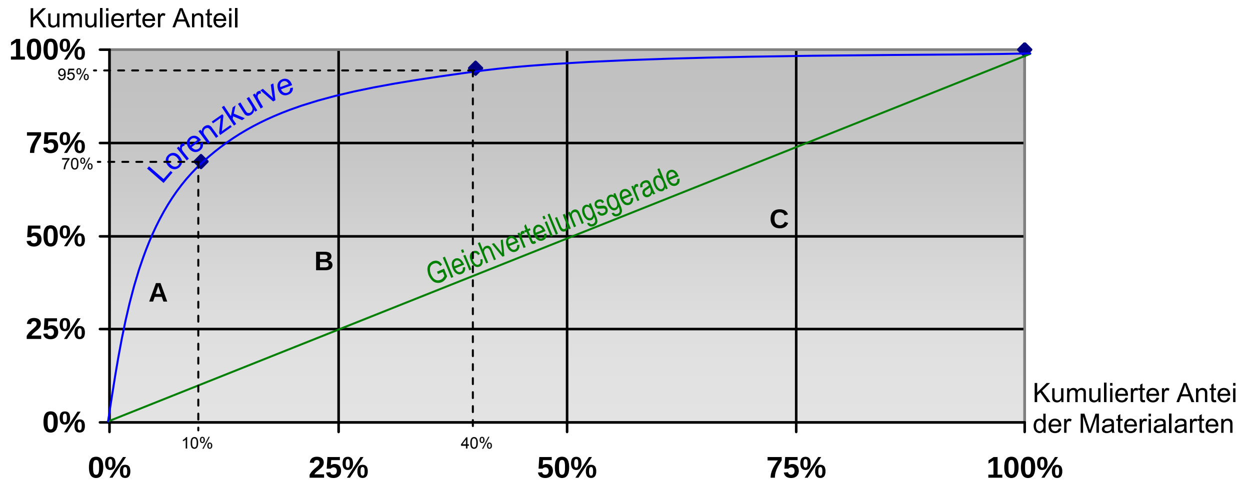
6. Beschaffung von Verbrauchsfaktoren

Die Verbrauchsfaktoren umfassen die Werkstoffe (Roh-, Hilfs- und Betriebsstoffe, sowie Einzelteile) und Werkzeuge.
Im Folgenden werden die Werkstoffe (=Materialien) behandelt.

6.1. Klassifizierung von Materialien

Empirische Untersuchungen haben ergeben, dass
- (A) 5-15% der Materialarten
  60-80% der Materialkosten
- (B) 20-40% der Materialarten
  20-30% der Materialkosten
- (C) 50-75% der Materialarten
  5-10% der Materialkosten

verursachen. Man unterscheidet daher A-, B-, C-Materialien.
Die Ungleichverteilung von Materialkosten auf Materialarten lässt sich graphisch wie folgt veranschaulichen:



Der Verlauf der Lorenzkurve bringt zum Ausdruck, wie stark die tatsächliche Verteilung von der Gleichverteilung abweicht.

Auswertung der ABC-Analyse:
Die A-Materialien verursachen hohe Materialkosten, weshalb es sich lohnt, ihren Bedarf genauer, aber auch aufwändiger zu planen. D.h., der Bedarf dieser Materialien wird abgeleitet aus dem geplanten Produktionsprogramm. Man spricht von „programmorientierten Verfahren der Materialbedarfsermittlung“. Siehe Abschnitt 6.2.1!
Die C-Materialien verursachen geringe Materialkosten, weshalb sich der Einsatz aufwändiger Verfahren zur Materialbedarfsermittlung nicht lohnt. Man setzt stattdessen einfache, ungenauere Verfahren ein, die so genannten „verbrauchsorientierten Verfahren“, d.h. man leitet den zukünftigen Materialbedarf aus den Verbräuchen der Vergangenheit ab. Siehe Abschnitt 6.2.2!

6.2 Planung des Materialbedarfs

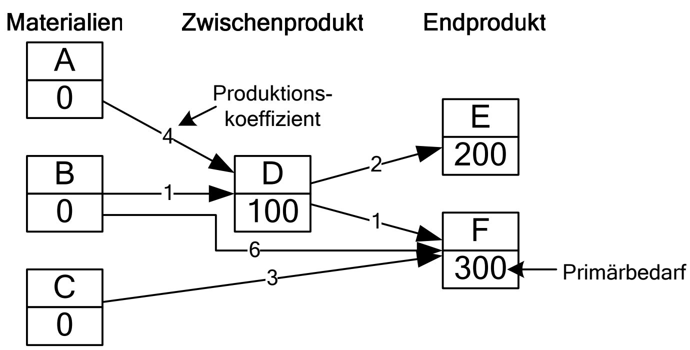
Qualitativer Materialbedarf: erforderliche Eigenschaften der Materialien
Quantitativer Materialbedarf: erforderliche Mengen der Materialien
Zur Ermittlung des quantitativen Materialbedarfs existieren zwei Verfahrensklassen: programm- und verbrauchsorientierte Verfahren

6.2.1 Programmorientierte Verfahren

(d.h. der quantitative Materialbedarf wird aus dem zukünftigen Produktionsprogramm abgeleitet)
Man unterscheidet drei Arten des quantitativen Materialbedarfs:

(1) Primärbedarf = Bedarf an Zwischen- und Endprodukten, die zum Absatz bestimmt sind.
(2) Sekundärbedarf = Bedarf an Zwischenprodukten und Materialien, die im Unternehmen weiterverarbeitet werden
(3) Tertiärbedarf = Bedarf an Materialien, die indirekt bei der Produktion verbraucht werden

Im Folgenden wird (1) gegeben sein, (2) ist zu ermitteln, (3) wird vernachlässigt.
Verfahren: Gozinto-Methode (basiert auf Gozintograph)
Beispiel: Aus den Materialien A, B und C werden ein Zwischenprodukt D und zwei Endprodukte E und F hergestellt.



"Gozintograph"

Lösung:

$$\text{Gesamtbedarf} = \text{Primärbedarf} + \text{Sekundärbedarf}$$

$$X_A = 0 + 4 \cdot X_D$$
$$X_B = 0 + 1 \cdot X_D + 6 \cdot X_D + 6 \cdot K_F$$
$$X_C = 0 + 3 \cdot X_F$$
$$X_D = 100 + 2 \cdot X_E + 1 \cdot X_F$$
$$X_E = 200 + 0$$
$$X_F = 300 + 0$$

Man erhält:

$X_F = 300$, $X_E = 200$, $X_D = 100 + 2 \cdot 200 + 1 \cdot 300 = 800$, $X_C = 900$, $X_B = 2\ 600$,
$X_A = 3\ 200$

6.2.2 Verbrauchsorientierte Verfahren

(d.h. der zukünftige Materialbedarf wird aus den Verbrauchsmengen der Vergangenheit abgeleitet)

(a) **Methode der einfachen Durchschnitte** (d.h. es wird das arithmetische Mittel gebildet)
Beispiel:

t	-4	-3	-2	-1	0	1
r_t	10	25	15	30	10	20

$\hat{r}_t = \dfrac{10+25+15+30+20}{5} = 20$ (geschätzter Verbrauch in $t=1$)

(b) **Methode der gleichen Durchschnitte** (d.h. in jeder Periode wird erneut das arithmetische Mittel der letzten z Verbrauchswerte gebildet)
Beispiel: $z=5$

t	-4	-3	-2	1-	0	1	2	3
r_t	10	25	15	30	20	20		
		25	15	30	20	30	24	
			15	30	20	30	35	26

$\hat{r}_1 = 20$, $\hat{r}_2 = 27$, $\hat{r}_3 = 31$

(c) **Methode der exponentiellen Glättung** (d.h. der geschätzte Verbrauch der Periode t ist ein gewichteter Durchschnitt aus geschätztem und tatsächlichem Verbrauch der Periode $t-1$) $\hat{r}_t = \alpha \cdot r_{t-1} + (1-\alpha)\cdot \hat{r}_{t-1}$ mit α als dimensionslosem Parameter („Glättungsparameter"). Dabei gilt: $0 \le \alpha \le 1$.
Beispiel: $\alpha = 0{,}50$, $\hat{r}_0 = 28$

$r_1 = \alpha \cdot r_0 + (1-\alpha)\cdot \hat{r}_0 = 0{,}50 \cdot 20 + 0{,}50 \cdot 28 = 24$

$\hat{r}_2 = 27$

$\hat{r}_3 = 31$

6.3 Planung der Materialbeschaffung

Qualitative Materialbeschaffung: Beschaffungsart, d.h. Eigen- versus Fremdbearbeitung/-bezug
Quantitative Materialbeschaffung: Beschaffungsart, d.h. es geht um die Ermittlung der „optimalen Bestellmenge".

<u>Problemstellung:</u>
Wie lautet die pro Bestellvorgang zu beschaffende Menge r für eine Materialart, wenn die mit der Beschaffung verbundenen Gesamtkosten minimiert werden sollen?

Faktorpreis in $\frac{[GE]}{[FE]}$

Gesamtbedarf in $\frac{[FE]}{[PZE]}$

Bestellfixe Kosten in $\frac{[GE]}{[Bestellung]}$

∅ Lagerbestand: $\frac{1}{2}$ Bestellung

∅ Lagerbestand in $[FE]$

$$K(r) = q \cdot R + k_B \cdot \frac{R}{r} + k_L \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot r\right)$$

Variable: je Bestellvorgang zu beschaffende Menge $\frac{[FE]}{[Bestellung]}$

Gesamtkosten in $\frac{[GE]}{[PZE]}$

Gesamte Bestellkosten in $\frac{[GE]}{[PZE]}$

Anzahl der Bestellungen pro $[PZE]$

Lagerhaltungskosten in $\frac{[GE]}{[FE]\cdot[PZE]}$

Gesamte Lagerkosten in $\frac{[GE]}{[PZE]}$

Für die Funktion $K(r)$ wird das Maximum gesucht:

$$K(r) = q \cdot R + k_B \cdot \frac{R}{r} + k_L \cdot \frac{1}{2} r$$

$$K'(r) = 0 + (-1) \cdot k_B \cdot R \cdot r^{-2} + k_2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$K'(r^*) = 0 \Leftrightarrow -k_B \cdot \frac{R}{(r^*)^2} + k_L \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow k_B \cdot \frac{R}{(r^*)^2} = \frac{1}{2} k_L$$

$$\Leftrightarrow (r^*)^2 = \frac{2k_B \cdot R}{k_L}$$

$$\Leftrightarrow r^* = \sqrt{\frac{2k_B \cdot R}{k_L}}$$

$$K\left(r^*\right) = 2 \cdot k_B \cdot R \cdot \frac{1}{\left(r^*\right)^3} > 0$$ $\Rightarrow$ Minimum!

r^* heißt „optimale Bestellmenge“ oder „wirtschaftliche Beschaffungsmenge“.

<u>Beispiel:</u>

$$q = 6,50 \frac{[€]}{[kg]},\ R = 18\ 000 \frac{[kg]}{[Jahr]},\ k_B = 120 \frac{[€]}{[Bestellung]},\ k_L = 0,75 \frac{[€]}{[kg \cdot Jahr]}$$

Bestimmen Sie die optimale Bestellmenge!

$$r^* = \sqrt{\frac{2 \cdot k_B \cdot R}{k_L}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 120 \cdot 18\ 000}{0,75}} = \underline{\underline{2\ 400}}$$

$$K\left(r^*\right) = 6,50 \cdot 18\ 000 + 120 \cdot \frac{18\ 000}{2\ 400} + 0,75 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\ 400 = \underline{\underline{118\ 800}}$$

Man kann nicht 7.5mal pro Jahr bestellen! Wie oft muss man pro Jahr bestellen? Hier $\underline{\underline{8}}$!