

1. Produktionssysteme als Input-Output-Systeme

Unter einem IO-System versteht man ein System innerhalb dessen Einsatzgüter (Inputs) in Ausbringungsgüter (Outputs) transformiert werden.



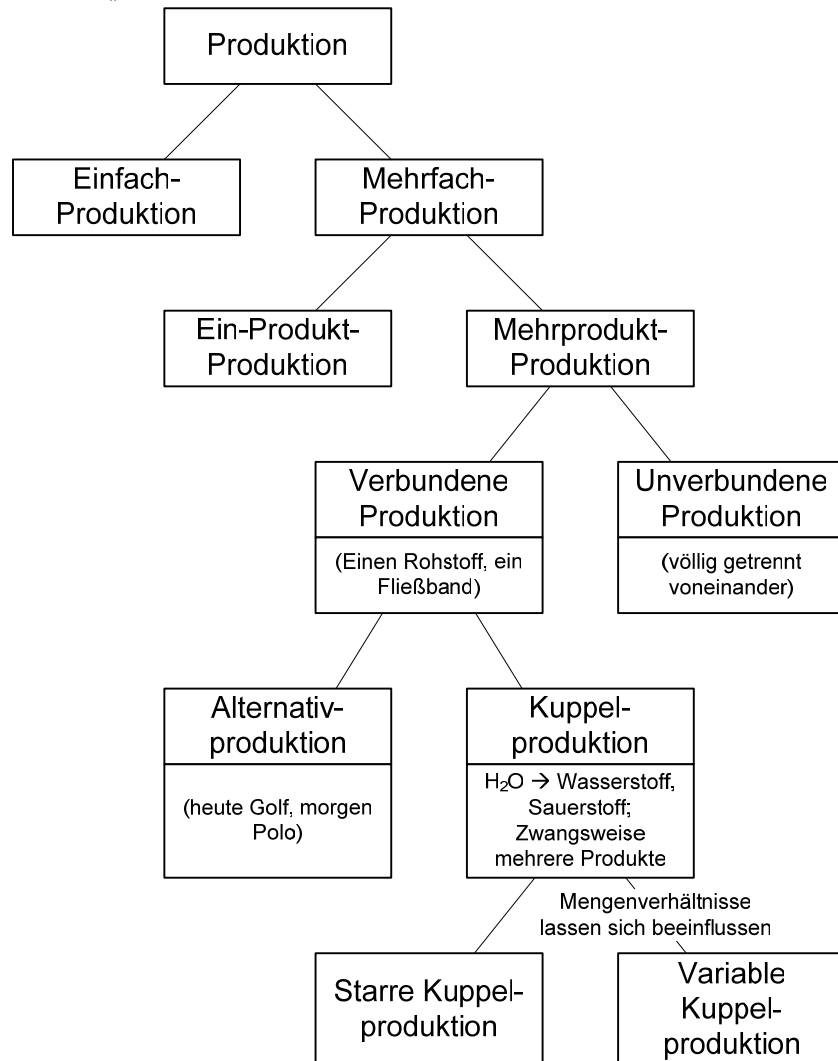
Man unterscheidet:

- a) Zustandstransformationen, d.h. Input und Output unterscheiden sich in ihrem Zustand.
- b) Zeitstransformationen, d.h. Input und Output unterscheiden sich in ihrer zeitlichen Zuordnung
- c) Ortstransformation, d.h. Input und Output unterscheiden sich in ihrer räumlichen Zuordnung (Bsp.: Transport)

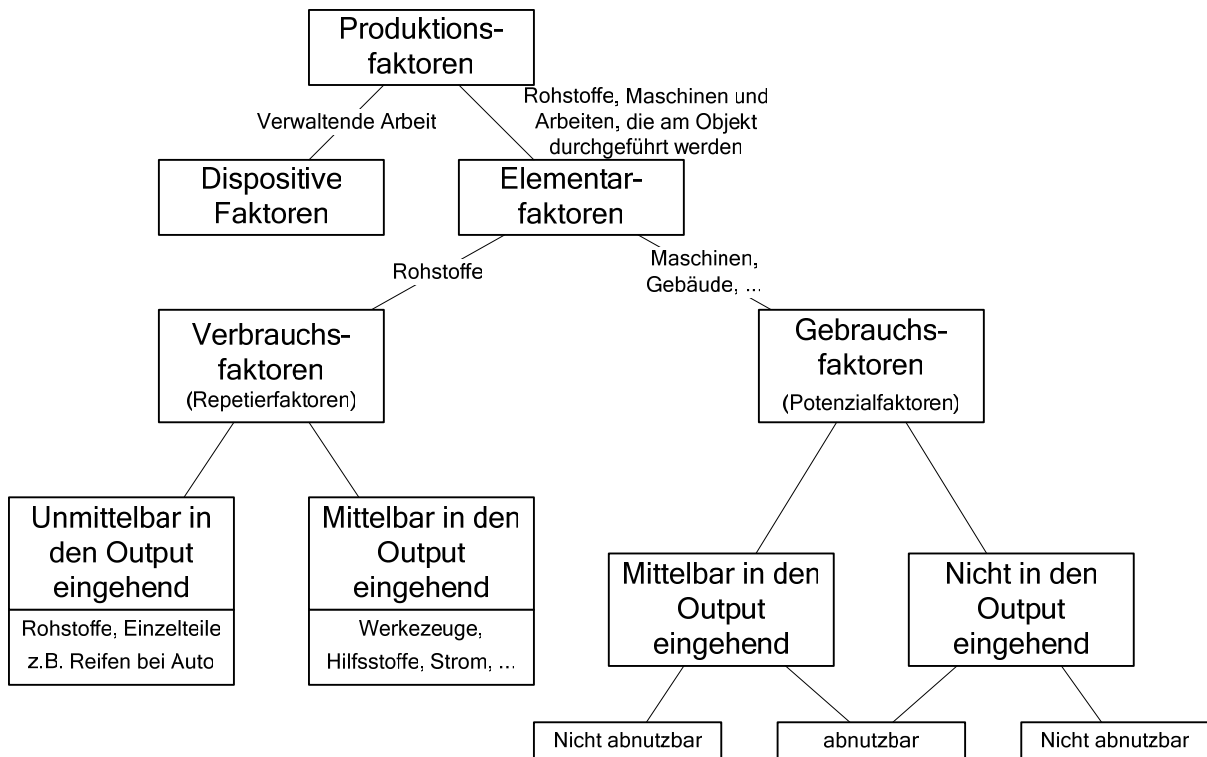
Schwerpunkt: a) Zustandstransformation

Hierzu gehört die „Produktion“, die aus bestimmten Inputs („Produktionsfaktoren“) bestimmte Outputs („Produkte“) erstellt.

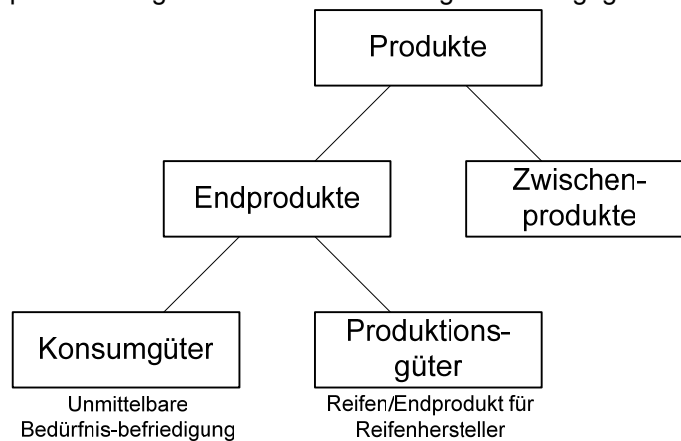
Zur Klassifikation der „Produktion“:



In diese verschiedene Arten von Produktion gehen die Produktionsfaktoren als Input ein.



Hinsichtlich des Outputs sind folgende Klassifikationsmöglichkeiten gegeben:



Für die Durchführung einer Produktionsplanung müssen sowohl die Inputs als auch die Outputs formal dargestellt werden.

Für den Input bedeutet dies:

Es sind die verschiedenen Faktorarten in ihren jeweils erforderlichen Einsatzmengen zu qualifizieren.

Beispiel:

$r_1 = 100$ Tischplatten pro Tag

$r_2 = 400$ Tischbeine pro Tag

$r_3 = 10$ Liter Leim pro Tag

$r_m =$ von der Produktionsfaktorart m eingesetzte Menge

Verallgemeinerung:

$$r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \text{ als Faktoreinsatzmengenvektor}$$

$$\Rightarrow r = \begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ r_M \end{pmatrix} \text{ mit } M \text{ als Anzahl der erforderlichen Faktorarten}$$

Dabei wird r_m gemessen in [FE]/[PZE] (Faktoreinheiten pro Planungszeiteinheit)

Beispiel: [Liter]/[Tag] \Rightarrow Liter pro Tag

Der Index von m läuft von 1 in Einer-Schritten bis M :

$$m = 1(1)M$$

Für den Output einer Produktion lässt sich ein so genannter Ausbringungsmengenvektor formalisieren:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_N \end{pmatrix}$$

Beispiel: $N = 4$

$$x = \begin{pmatrix} 20 \text{ Tische, Höhe 65cm, pro Tag} \\ 30 \text{ Tische, Höhe 70cm, pro Tag} \\ 35 \text{ Tische, Höhe 75cm, pro Tag} \\ 15 \text{ Tische, Höhe 80cm, pro Tag} \end{pmatrix}$$

2. Technologien

Ausgang:

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} -\underline{r} \\ +\underline{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_1 \\ -r_2 \\ \vdots \\ -r_{11} \\ +x_1 \\ +x_2 \\ \vdots \\ +x_n \end{pmatrix}$$

Eine Menge von Produktionspunkten, die technisch realisierbar sind, heißt Technologie(menge).

Beispiel: $\underline{y} = \begin{pmatrix} -\dots \\ -\dots \\ -400 \text{ Reifen} \\ -\dots \\ +\dots \\ +100 \text{ PKW} \end{pmatrix}$

Dagegen ist technisch nicht realisierbar:

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} -\dots \\ -\dots \\ -402 \text{ Reifen} \\ -\dots \\ +\dots \\ +100,5 \text{ PKW} \end{pmatrix}$$

Produktionspunkte mit ganz bestimmten Eigenschaften (z.B. festes Input-Output-Verhältnis) werden zu so genannten Produktionsprozessen (z.B. linearen) zusammengefasst. Unter allen möglichen Produktionspunkten ist es sinnvoll diejenigen auszuwählen, die andere Produktionspunkte dominieren. Dies ist messbar durch das „Effizienzkriterium“.

(1) Input-Effizienz

Input-effiziente Produktionspunkte unterscheiden sich von input-ineffizienten dadurch, dass letztere im Vergleich zu ersteren bei gegebenen Output für mindestens eine Faktorart einen höheren Input erfordern.

Beispiel:

$$\underline{y}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -3 \\ +\underline{x}^0 \end{pmatrix}, \underline{y}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -4 \\ +\underline{x}^0 \end{pmatrix}, \underline{y}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \\ +\underline{x}^0 \end{pmatrix}, \underline{y}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \\ +\underline{x}^0 \end{pmatrix}$$

Welche(r) Produktionspunkt(e) ist/sind input-effizient?

\underline{y}_1 wird dominiert von \underline{y}_4 .

\underline{y}_2 wird dominiert von \underline{y}_4 .

\underline{y}_3 und \underline{y}_4 sind input-effizient.

(2) Output-Effizienz

Output-effiziente Produktionspunkte unterscheiden sich von output-ineffizienten dadurch, dass letztere im Vergleich zu ersteren bei gegebenem Input für mindestens eine Produktionsart einen geringeren Output liefern.

Beispiel:

$$\underline{y}_1 = \begin{pmatrix} -\underline{r}^0 \\ +5 \\ +7 \\ +3 \end{pmatrix}, \underline{y}_2 = \begin{pmatrix} -\underline{r}^0 \\ +6 \\ +4 \\ +2 \end{pmatrix}, \underline{y}_3 = \begin{pmatrix} -\underline{r}^0 \\ +4 \\ +6 \\ +2 \end{pmatrix}, \underline{y}_4 = \begin{pmatrix} -\underline{r}^0 \\ +7 \\ +5 \\ +3 \end{pmatrix}$$

\underline{y}_3 wird dominiert von \underline{y}_1 .

\underline{y}_2 wird dominiert von \underline{y}_4 .

\underline{y}_1 und \underline{y}_4 sind output-effizient.

(3) Effizienz

Effiziente Produktionspunkte unterscheiden sich von ineffizienten dadurch, dass letztere im Vergleich zu ersteren höhere Inputs gleichen oder niedrigeren Outputs und/oder geringere Outputs bei gleichen oder höheren Inputs aufweisen.

Beispiel:

$$\underline{y}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -5 \\ +4 \\ +3 \end{pmatrix}, \underline{y}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -4 \\ +3 \\ +3 \end{pmatrix}, \underline{y}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -5 \\ +4 \\ +2 \end{pmatrix}, \underline{y}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -4 \\ +4 \\ +3 \end{pmatrix}$$

\underline{y}_3 wird von \underline{y}_1 dominiert.

\underline{y}_1 wird von \underline{y}_4 dominiert.

\underline{y}_2 und \underline{y}_4 sind effizient

Ehemalige Klausuraufgabe

Gegeben sind als Produktionspunkte:

$$\underline{y}_1 = \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ +3 \\ +4 \end{pmatrix}, \underline{y}_2 = \begin{pmatrix} -10 \\ -30 \\ +2 \\ +1 \end{pmatrix}, \underline{y}_3 = \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ +3 \\ +2 \end{pmatrix}, \underline{y}_4 = \begin{pmatrix} -20 \\ -30 \\ +3 \\ +4 \end{pmatrix}, \underline{y}_5 = \begin{pmatrix} -20 \\ -10 \\ +4 \\ +3 \end{pmatrix}$$

\underline{y}_2 wird dominiert von \underline{y}_1 .

\underline{y}_3 wird dominiert von \underline{y}_1 .

\underline{y}_4 wird dominiert von \underline{y}_1 .

\underline{y}_1 und \underline{y}_5 sind effizient

3. Bewertung von Gütern

Rein mengenmäßig ist vielfach nicht zu entscheiden, welcher Produktionspunkt welchen anderen dominiert.

(1) Bewertung der Faktoreinsatzmengen (Inputs)

r_m : Einsatzmenge von Produktionsfaktorart m , in [FE]/[PZE]

q_m : Einsatzpreis von Produktionsfaktorart m , in [GE] (Geldeinheiten)/[FE]

} $m = 1(1)M$

Die bewerteten Verbräuche (=Einsatzmengen) aller M Faktorarten ergeben in ihrer die Summe der Gesamtkosten:

$$K = \sum_{m=1}^M q_m \cdot r_m$$

$$\frac{[\text{GE}]}{[\text{FE}]} \cdot \frac{[\text{FE}]}{[\text{PZE}]}$$

Ziel: Kartenminimierung

Beispiel:

$$\underline{y}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -3 \\ -5 \\ +\underline{x}_0 \end{pmatrix}, \underline{y}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \\ -6 \\ +\underline{x}_0 \end{pmatrix}, \underline{y}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -4 \\ -4 \\ +\underline{x}_0 \end{pmatrix}$$

$$q_1 = 10, q_2 = 30, q_3 = 40, q_4 = 20$$

Zu bestimmen ist der kostenminimale Produktionspunkt.

$$K_1 = 10 \cdot 2 + 30 \cdot 4 + 40 \cdot 3 + 20 \cdot 5 = 360$$

$$K_2 = 300$$

$$K_3 = 330$$

$\Rightarrow \underline{y}_2$ ist kostenminimal!

(2) Bewertung der Produktausbringungsmengen (Outputs)

x_n : Ausbringungsmenge von Produktart n , in [PE]/[PZE]

p_n : Stückerlös von Produktart n , in [GE]/[PE]

} $n = 1(1)N$

In ihrer Summe ergeben die bewerteten Outputs die Gesamterlöse:

$$E = \sum_{n=1}^N p_n \cdot x_n$$

Ziel: Erlösmaximierung (Pendant: Output-Effizienz)

Beispiel:

$$\underline{y}_1 = \begin{pmatrix} -r^0 \\ +3 \\ +5 \\ +4 \end{pmatrix}, \underline{y}_2 = \begin{pmatrix} -r^0 \\ +4 \\ +6 \\ +3 \end{pmatrix}, \underline{y}_3 = \begin{pmatrix} -r^0 \\ +3 \\ +4 \\ +4 \end{pmatrix}, \underline{y}_4 = \begin{pmatrix} -r^0 \\ +4 \\ +6 \\ +4 \end{pmatrix}$$

$$p_1 = 20$$

$$p_2 = 10$$

$$p_3 = 30$$

Ermitteln Sie den erlösmaximalen Produktionspunkt.

$$E_1 = 20 \cdot 3 + 10 \cdot 5 + 30 \cdot 4 = 230$$

$$E_2 = 230$$

$$E_3 = 220$$

$$E_4 = 260$$

$\Rightarrow \underline{y}_4$ ist der erlösmaximale Produktionspunkt

(3) Bewertung der Faktoreinsatz- und Produktausbringungsmengen

$$G = E - K$$

$$= \sum_{n=1}^N p_n \cdot x_n - \sum_{m=1}^M q_m \cdot r_m$$

Ziel: Gewinnmaximierung

Beispiel:

$$\underline{y}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ +3 \\ +5 \\ +4 \\ +6 \end{pmatrix}, \underline{y}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ +3 \\ +4 \\ +3 \\ +7 \end{pmatrix}, \underline{y}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ +3 \\ +5 \\ +5 \\ +6 \end{pmatrix}$$

$$q_1 = 50, q_2 = 20$$

$$p_1 = 30, p_2 = 10, p_3 = 20, p_4 = 10$$

$$G_1 = 30 \cdot 3 + 10 \cdot 5 + 20 \cdot 4 + 10 \cdot 6 - 50 \cdot 2 - 20 \cdot 4 = +100$$

$$G_2 = +10$$

$$G_3 = +140$$

Gewinnmaximal ist Produktionspunkt \underline{y}_3 .

4. Produktionsplanung auf der Grundlage von Leontief-Technologien

4.1 Lineare Beziehungen zwischen Inputs und Outputs

Alle diejenigen Produktionspunkte, bei denen eine Ver- λ -fachung der Einsatzmengen aller Inputs zu einer Ver- λ -fachung der Ausbringungsmengen aller Outputs führt, gehört zu einem linearen Prozess.

Formal:

$$Y = \left\{ \underline{y} \mid \underline{y} = \lambda \cdot \underline{y}^0; \lambda \geq 0 \right\}$$

↑ linearer Prozess „Menge von Produktionspunkten, für die gilt...“ „Basisproduktionspunkt“

Beispiel:

$$Y = \left\{ \underline{y} \mid \underline{y} = \lambda \cdot \underline{y}^0 = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ +4 \\ +2 \end{pmatrix}; \lambda \geq 0 \right\}$$

Zu diesem linearen Prozess gehören z.B. folgende Produktionspunkte:

$$(a) \lambda_1 = 0,5 \Rightarrow \underline{y}_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ +2 \\ +1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \lambda_2 = 2 \Rightarrow \underline{y}_2 = \begin{pmatrix} -20 \\ -40 \\ +8 \\ +4 \end{pmatrix}$$

$$(c) \lambda_3 = 0,3 \Rightarrow \underline{y}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ +1,2 \\ +0,6 \end{pmatrix}$$

Produktionspunkte linearer Prozesse, die technisch realisierbar sind, gehören zur linearen Technologie(menge).

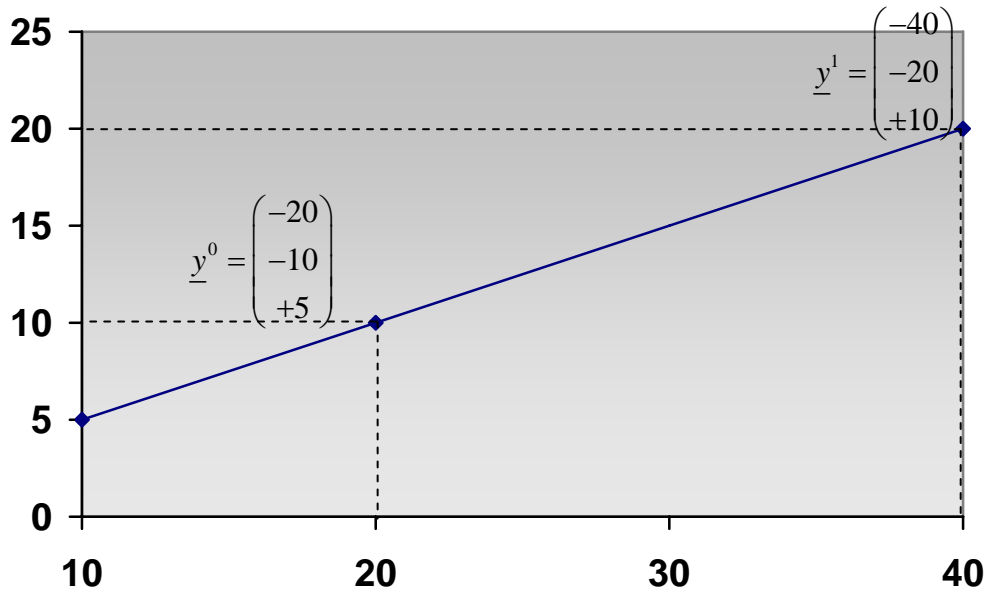
Sind im Falle linearer Technologien die Einsatzmengen mindestens einer Faktorart beschränkt, dann liegt eine Leontief-Technologie vor.

Wenn die Produktionsplanung grafisch erfolgen soll, sind nur zwei Faktorarten als Inputs und eine Produktart als Output möglich.

Beispiel:

$$Y = \left\{ \underline{y} \mid \underline{y} = \lambda \cdot \underline{y}^0 = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ -10 \\ +5 \end{pmatrix}; \lambda \geq 0 \right\}$$

Dieser lineare Prozess lässt sich grafisch wie folgt darstellen:



4.2 Mengensorientierte Planung (d.h. die Inputs und Outputs werden ohne Berücksichtigung von Kosten und Erlösen geplant.)

(a) Vernachlässigung von Faktorbeschränkungen (Lineare Technologien)

Es wird im Folgenden unterschieden zwischen

- reinen linearen Prozessen

$$Y = \{ \underline{y} \mid \underline{y} = \lambda \cdot \underline{y}^0; \lambda \geq 0 \}$$

und

- gemischten linearen Prozessen

$$Y = \{ \underline{y} \mid \underline{y} = \lambda \cdot \underline{y}^g; \lambda \geq 0 \}$$

$$\text{mit } \underline{y}^g = c_i \cdot \underline{y}_i^0 + c_j \cdot \underline{y}_j^0,$$

wobei \underline{y}_i^0 und \underline{y}_j^0 die Basisproduktionspunkte der Prozesse i und j sind

und c_i und c_j die Anteile kennzeichnen, zu denen die Prozesse i und j an der Herstellung der Outputs beteiligt sind.

Beachte: $c_i > 0, c_j > 0, c_i + c_j = 1$

Beispiel:

$$Y_1 = \left\{ \underline{y} \mid \underline{y} = \lambda \cdot \underline{y}_1^0 = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ +5 \end{pmatrix}; \lambda \geq 0 \right\}$$

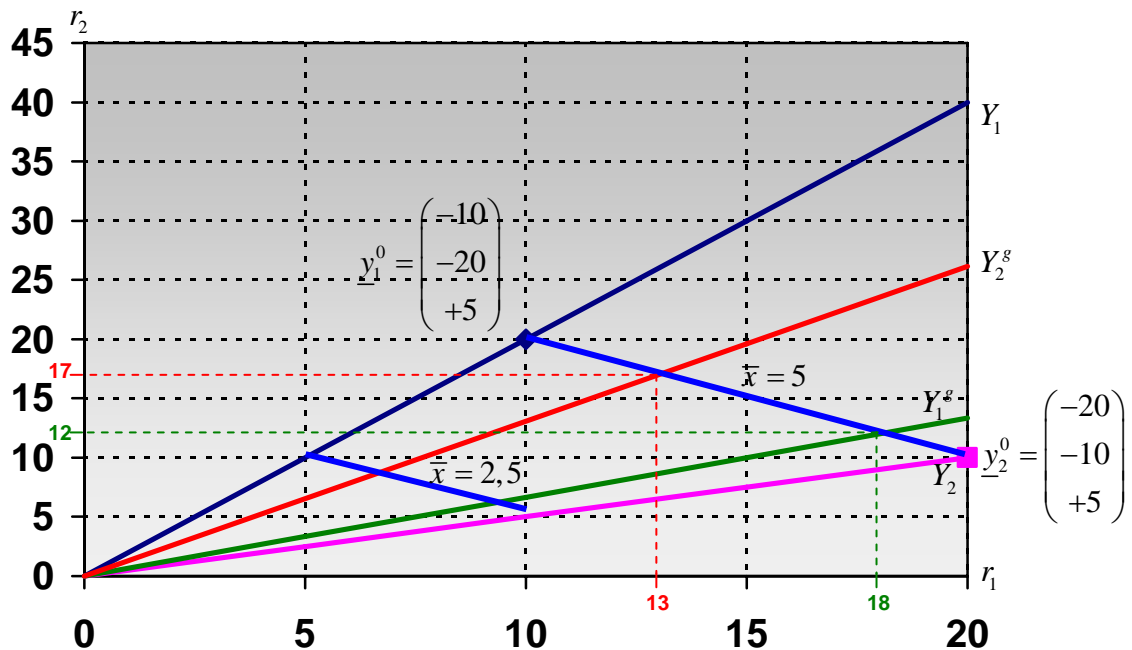
$$Y_2 = \left\{ \underline{y} \mid \underline{y} = \lambda \cdot \underline{y}_2^0 = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ -10 \\ +5 \end{pmatrix}; \lambda \geq 0 \right\}$$

Beide Prozesse sollen gemischt werden:

(1) $c_1 = 0,20$ und $c_2 = 0,80$

(2) $c_1 = 0,70$ und $c_2 = 0,30$

Grafische Darstellung der Prozesse 1 und 2 sowie der beiden Mischungen.



$$(1) Y_1^g = \left\{ \underline{y} \mid \underline{y} = \lambda \cdot \underline{y}_1^g; \lambda \geq 0 \right\} \text{ mit } \underline{y}_1^g = 0,20 \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ +5 \end{pmatrix} + 0,80 \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ -10 \\ +5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -12 \\ +5 \end{pmatrix}$$

$$(2) Y_2^g = \left\{ \underline{y} \mid \underline{y} = \lambda \cdot \underline{y}_2^g; \lambda \geq 0 \right\} \text{ mit } \underline{y}_2^g = 0,70 \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ +5 \end{pmatrix} + 0,30 \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ -10 \\ +5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ -17 \\ +5 \end{pmatrix}$$

Die Verbindungslinie aller Faktormengenkombinationen, die zu einem identischen Output führen, heißt Produktisquante. Bei linearen Prozessen verlaufen alle Produktionsquanten zueinander parallel.

(b) Berücksichtigung von Faktormengenbeschränkungen (Leontief-Technologien)

Problemstellung:

Welcher Output ist unter Einsatz welcher Inputs maximal herstellbar, wenn mindestens eine Inputart durch einen gegebenen Vorrat beschränkt ist?

Beispiel:

$$Y_1 = \left\{ \underline{y} \mid \underline{y} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ +5 \end{pmatrix}; \lambda \geq 0 \right\}$$

$$Y_2 = \left\{ \underline{y} \mid \underline{y} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ -10 \\ +5 \end{pmatrix}; \lambda \geq 0 \right\}$$

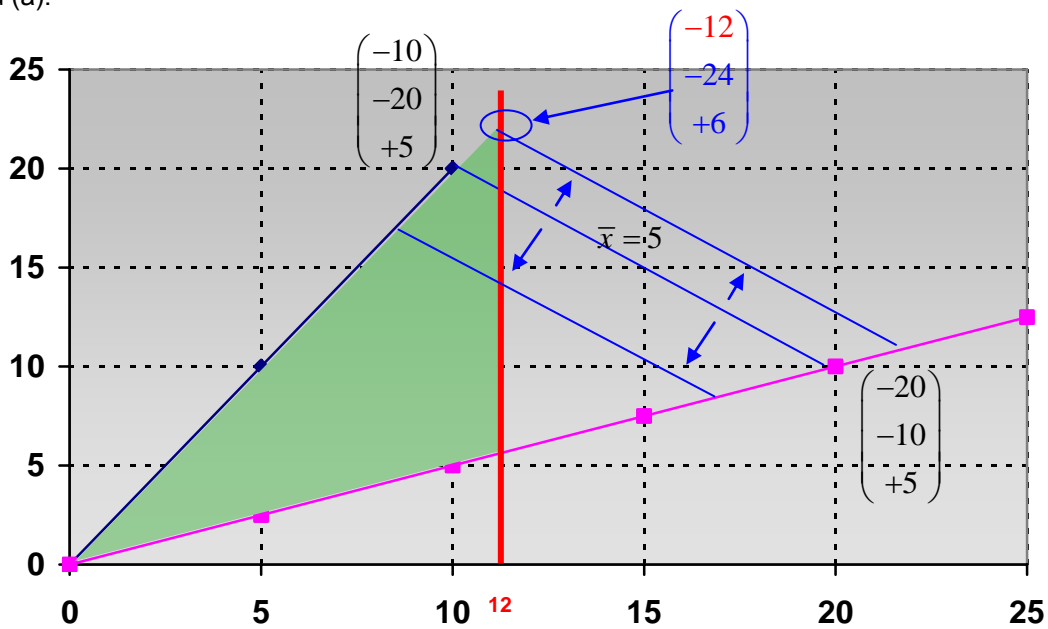
(a) $\bar{r}_1 = 12$

(b) $\bar{r}_2 = 14$

(c) $\bar{r}_1 = 14$ und $\bar{r}_2 = 10$

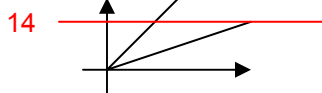
Grafische Lösung:

Zu (a):



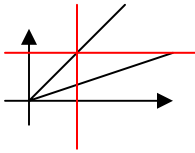
$x_{\max} = 6$

Zu (b):



$x_{\max} = 7$

Zu (c):



$$x_{\max} = 4$$

4.3 Kostenorientierte Planung

4.3.1 Vernachlässigung von Faktormengenbeschränkungen

a) Kostenminimierung bei gegebenem Output

Problemstellung:

Welcher von verschiedenen linearen Prozessen ist einzusetzen, wenn ein gegebener Output kostenminimal herzustellen ist?

Beispiel: Gegeben sind

$$Y_1 = \left\{ \underline{y} \mid \underline{y} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ +5 \end{pmatrix}; \lambda \geq 0 \right\}$$

$$Y_2 = \left\{ \underline{y} \mid \underline{y} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ -6 \\ +3 \end{pmatrix}; \lambda \geq 0 \right\}$$

Die Faktorpreise betragen:

$$q_1 = 1,00 \frac{[\text{GE}]}{[\text{FE}]}, \quad q_2 = 0,50 \frac{[\text{GE}]}{[\text{FE}]}$$

Welcher Prozess ist kostenminimal?

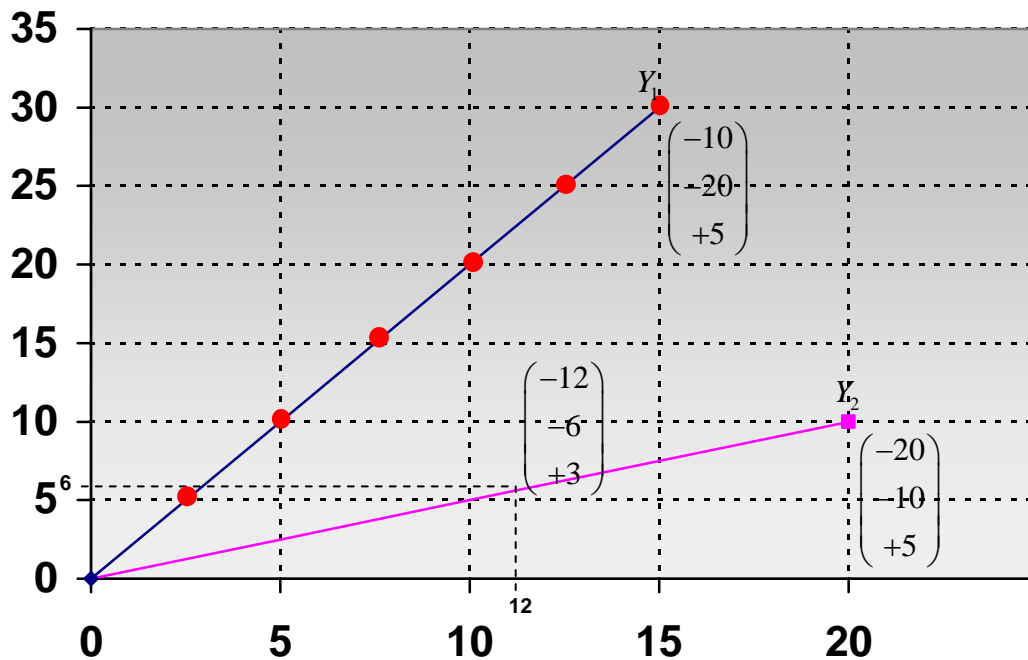
Zu bestimmen sind die Stückkosten der beiden linearen Prozesse:

$$k_1 = 1,00 \frac{[\text{GE}]}{[\text{FE}]} \cdot \underset{\uparrow \frac{10}{5}}{2} \frac{[\text{FE}]}{[\text{PE}]} + 0,50 \frac{[\text{GE}]}{[\text{FE}]} \cdot \underset{\uparrow \frac{20}{5}}{4} \frac{[\text{FE}]}{[\text{PE}]} = \underline{\underline{4}} \frac{[\text{GE}]}{[\text{PE}]}$$

$$k_2 = 1,00 \cdot 4 + 0,50 \cdot 2 = \underline{\underline{5}}$$

y_1 ist kostenminimal!

Diese Aussage gilt für jeden beliebigen Output – wegen der Linearität der Prozesse.



Die Kombination von Faktoreinsatzmengen (Z.B. $r_1 = 10$ und $r_2 = 20$), die einen gegebenen Output (i.B. $x = 5$) zu minimalen Kosten erzeugt, heißt „Minimalkostenkombination“. Die Verbindungslinie der zu unterschiedlichen Outputs gehörenden „Minimalkostenkombinationen“ heißt „Minimalkostenpfad“.

b) Outputmaximierung bei gegebenem Kostenbudget

Problem:

Welcher Output ist mit welcher Faktormengenkombination durch welchen Prozess maximal herstellbar, wenn ein Kostenbudget vorgegeben ist?

Beispiel:

$$Y_1 = \left\{ \underline{y} \mid \underline{y} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -12 \\ +4 \end{pmatrix}; \lambda \geq 0 \right\}$$

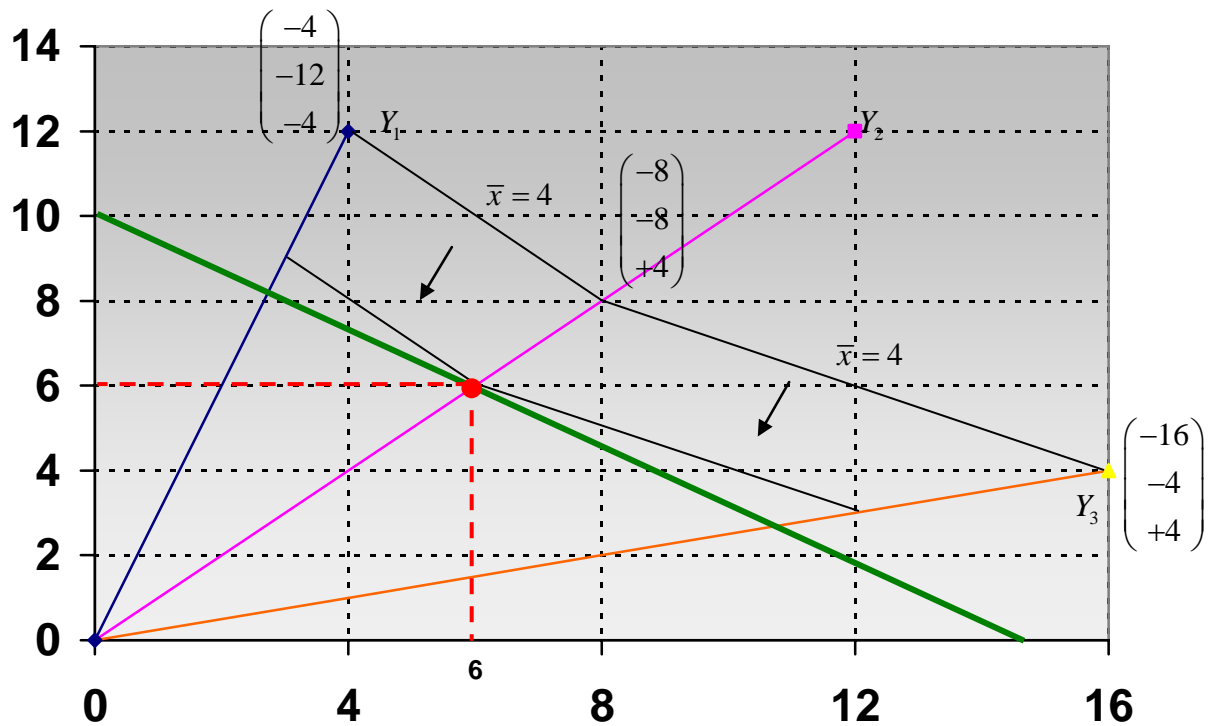
$$Y_2 = \left\{ \underline{y} \mid \underline{y} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ +4 \end{pmatrix}; \lambda \geq 0 \right\}$$

$$Y_3 = \left\{ \underline{y} \mid \underline{y} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -16 \\ -4 \\ +4 \end{pmatrix}; \lambda \geq 0 \right\}$$

Faktorpreise: $q_1 = 20$, $q_2 = 30$

Kostenbudget: $\bar{K} = 300$

Bestimmen Sie das Outputmaximum!



Zum Kostenbudget von 300 führt folgende Gerade:

$$20 \cdot r_1 + 30 \cdot r_2 = 300$$

$$\Leftrightarrow r_2 = -\frac{2}{3} \cdot r_1 + 10$$

Faktormengenkombination die bei gegebenem Budget von 300 zum maximalen Output führt.

Hier: $r_1^* = 6$ und $r_2^* = 6$

Maximaler Output $x^* = \underline{\underline{3}}$ (herzustellen mit dem Prozess Y_2)

4.3.2 Berücksichtigung von Faktormengenbeschränkungen

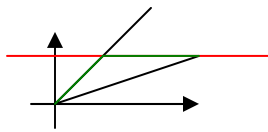
Welcher Output ist mit welcher Faktormengenkombination durch welchen Prozess kostenminimal herstellbar, wenn der Vorrat mindestens einer Faktorart beschränkt ist?

Beispiel:

$$Y_1 = \left\{ \underline{y} \mid \underline{y} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ +5 \end{pmatrix}; \lambda \geq 0 \right\}$$

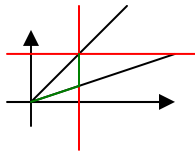
$$Y_2 = \left\{ \underline{y} \mid \underline{y} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ -10 \\ +5 \end{pmatrix}; \lambda \geq 0 \right\}$$

2. $\bar{r}_2 = 16$
 $q_1 = 1,00$ und $q_2 = 0,50$
 Ergebnis: $k_1 = 4$ und $k_2 = 5$



$$x_{\max} = \underline{\underline{8}}$$

3. $\bar{r}_1 = 16$ und $\bar{r}_2 = 14$
 $q_1 = 0,50$ und $q_2 = 1$
 Ergebnis:
 $k_1 = 5$ und $k_2 = 4$



$$x_{\max} = \underline{\underline{5}}$$

5. Produktionsplanung auf der Grundlage von Gutenbergtechnologien

Unter einer Gutenbergtechnologie(menge) versteht man die Menge aller technisch realisierbaren Produktionspunkte, für die gilt, dass sich der Verbrauch einer Faktorart m (symbolisiert durch r_m) ergibt über folgende Multiplikatoren:

$$r_m = a_m \cdot X$$

$$\frac{[FE]}{[PZE]} = \frac{[FE]}{[PE]} \cdot \frac{[PE]}{[PZE]}$$

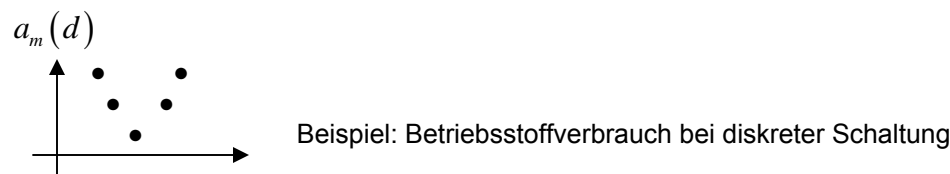
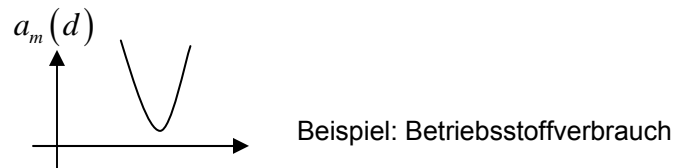
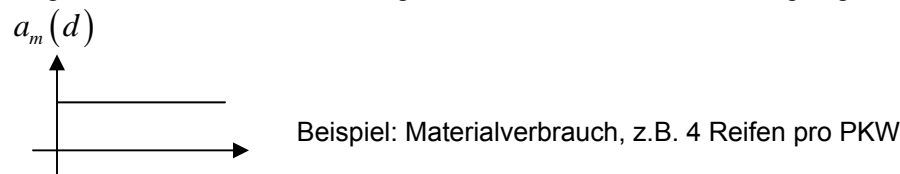
Dabei muss a_m nicht länger (wie in Kapitel 4) konstant sein. Im Folgenden kann a_m variieren, und zwar in Abhängigkeit von der Produktionsgeschwindigkeit (=Intensität) d .

$$\frac{[PE]}{[ZE]}$$

Gutenberg hat zuerst die Zusammenhänge von d und a_m untersucht. Daher heißen die Funktionen $a_m(d)$ Gutenberg-Verbrauchsfunktionen.

5.1 Gutenberg-Verbrauchsfunktionen

Folgende Verläufe von Gutenberg-Verbrauchsfunktionen sind festgelegt worden:



Mit Hilfe derartiger Gutenberg-Verbrauchsfunktionen lässt sich die Produktionsplanung mengen- und kostenorientiert durchführen.

5.2 Mengenorientierte Planung

5.2.1 Vernachlässigung von Faktormengenbeschränkungen

Problemstellung:

Welche von unterschiedlich möglichen Produktionen (d.h. Produktionsgeschwindigkeiten) sind zu realisieren, wenn die Faktoreinsatzmengen minimiert werden sollen?

In der Regel ist diese Problemstellung nicht eindeutig lösbar. Man kann lediglich effiziente von ineffizienten Produktionen unterscheiden.

Beispiel:

$M = 3$ Faktorarten mit den folgenden GVFn:

$$a_1(d) = \frac{1}{10} \cdot d^2 - 4 \cdot d + 45$$

$$a_2(d) = \frac{1,6}{d}$$

$$a_3(d) = 10$$

Für d gilt folgendes Intervall: $d \in [10;30]$

Gesucht ist die Menge der effizienten Produktionen, d.h. die Menge derjenigen Produktionen, die einen Output unter $x = 1$ mit einem möglichst geringen Input erzeugen.

Zunächst werden die drei Inputs separat danach untersucht, für welche Intensität d der Verbrauch minimal wäre.

(1) $m = 1$

$$a_1(d) = \frac{1}{10}d^2 - 4 \cdot d + 45$$

Gesucht ist das Minimum!

$$a_1'(d) = \frac{1}{5} \cdot d - 4$$

$$\frac{1}{5} \cdot d_1^* - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow d_1^* = \underline{\underline{20}}$$

$$a_1''(d_1^*) = \frac{1}{5} > 0$$

$\Rightarrow d_1^* = 20$ führt zu einem Minimum!

(2) $m = 2$

$$a_2(d) = \frac{1,6}{d} = 1,6 \cdot d^{-1}$$

$$a_2'(d) = -1,6 \cdot d^{-2} = -\frac{1,6}{d^2}$$

< 0

$\Rightarrow a_2(d)$ ist eine streng monoton fallende Funktion!

\Rightarrow Das gesuchte Minimum liegt am rechten Rand des Definitionsbereichs $[10;30]$

$$\Rightarrow d_2^* = \underline{\underline{30}}$$

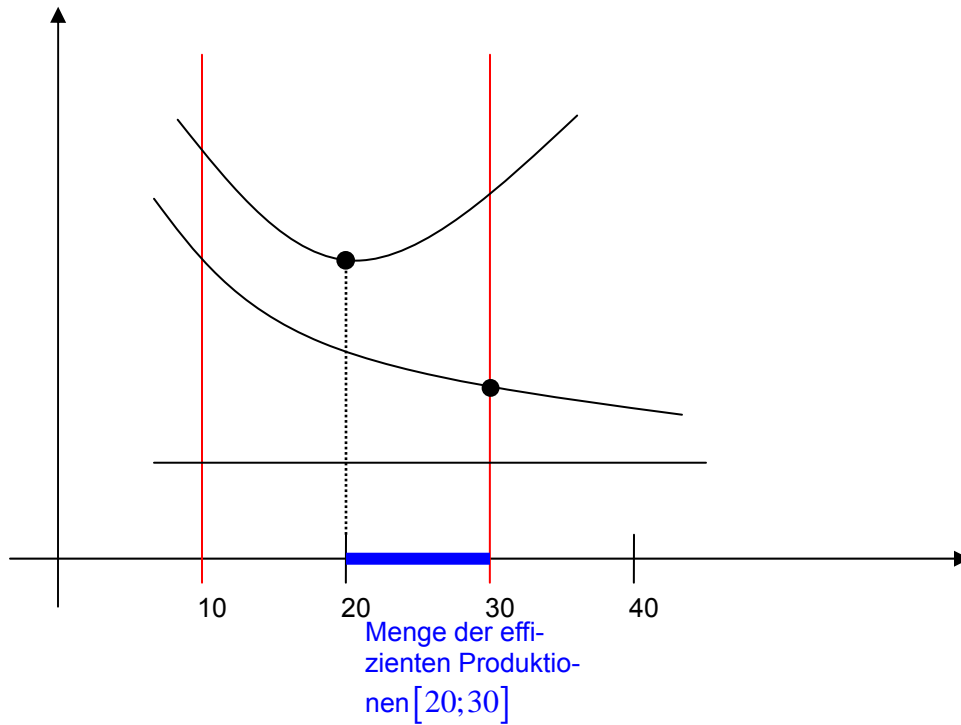
(3) $m = 3$

$$a_3(d) = 10$$

\Rightarrow Für alle $d \in [10;30]$ ist der Verbrauch identisch.

Welche Produktionen sind effizient?

Skizze:



Übungsaufgabe:

$$a_1(d) = \frac{1}{4} \cdot d^2 - 45d + 3000$$

$$a_2(d) = \frac{3}{8} \cdot d^2 - 48d + 2000$$

$$d \in [30; 80]$$

Bestimmen Sie die Menge der effizienten Produktionen.

Menge: $d \in [64; 80]$

5.2.2 Berücksichtigung von Faktormengenbeschränkungen

Problemstellung:

Welcher Output ist maximal herstellbar, wenn die Inputs der Faktorarten begrenzt sind?

Beispiel: $M = 3$

$$a_1(d) = \frac{1}{10} \cdot d^2 - 4 \cdot d + 45$$

$$a_2(d) = \frac{1,6}{d}$$

$$d_3(d) = 10$$

Begrenzte Faktorvorräte:

$$\bar{r}_1 = 1200 \text{ [FEJ]/[PZE]}$$

$$\bar{r}_2 = 10$$

$$\bar{r}_3 = 1500$$

Wie lautet X_{\max} , wenn $\bar{d} = 25$ gegeben ist?

Für $\bar{d} = 25$ ergeben sich folgende Faktorverbräuche pro Stück:

$$\begin{aligned} a_1(\bar{d} = 25) &= \frac{1}{10} \cdot 25^2 - 4 \cdot 25 + 45 \\ &= 62,5 - 100 + 45 \\ &= \underline{\underline{7,5}} \text{ [FE]/[PE]} \end{aligned}$$

$$a_2(\bar{d} = 25) = \frac{1,6}{25} = \underline{\underline{0,064}}$$

$$a_3(\bar{d} = 25) = \underline{\underline{10}}$$

Mit Hilfe der gegebenen Faktorvorräte \bar{r}_m und der ermittelten Faktorverbräuche pro

Stück $a_m(\bar{d})$ lassen sich die jeweils maximal herstellbaren Outputs durch folgende Quotienten ermitteln:

$$\frac{\bar{r}_m}{a_m(\bar{d})}$$

Hier:

$$m = 1: \frac{1200 \text{ [FEJ]/[PZE]}}{7,5 \text{ [FE]/[PE]}} = 160 \frac{\text{[PE]}}{\text{[PZE]}}$$

$$m = 2: \frac{10}{0,064} = \underline{\underline{156,25}}$$

$$m = 3: \frac{1500}{10} = \underline{\underline{150}}$$

Als maximaler Output ist somit erzeugbar:

$$X_{\max} = \min_{m=1}^M \frac{\bar{r}_m}{a_m(\bar{d})}$$

$$= \min \{160; 156,25; 150\}$$

$$= \underline{\underline{150}}$$

Die begrenzende Faktorart ist $M = 3$!

Zusatzfragen:

(a) Ermitteln Sie für alle drei Faktorarten die Restmengen, wenn $X_{\max} = 150$ hergestellt wird!

(b) Welche Auswirkungen hätte eine Verdoppelung von

(b1) \bar{r}_1

(b2) \bar{r}_3

auf X_{\max} ?

Zu (a): Reste $m = 1 : 75$

$m = 2 : 0,4$

$m = 3 : 0$

Zu (b): (b1) keine!

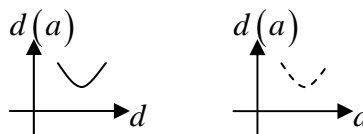
(b2) $X_{\max}^{\text{neu}} = 156,25$

5.3 Kostenorientierte Planung

Annahmen:

- gegebene Gutenberg-Verbrauchsfunktionen
- gegebene Faktorpreise

versus diskret



- stetig variierbare Intensitäten
- Gegebener Definitionsbereich für die Intensitäten
- begrenzte Einsatzzeit des Produktionssystems

Problemstellung:

Welche Produktionsweise (d.h. welcher Einsatz welcher Intensitäten) gewährleistet, dass welche Produktionsmengen jeweils zu minimalen Kosten erzeugt werden?

Beispiel:

Zwei Faktorarten werden zur Herstellung eines Problems eingesetzt:

$$m = 1 : q_1 = 10[\text{GE}]/[\text{FE}]$$

$$a_1(d) = \frac{1}{10} \cdot d^2 - 4 \cdot d + 45, \text{ gemessen in } [\text{FE}]/[\text{PE}]$$

$$m = 2 : q_2 = 8[\text{GE}]/[\text{FE}]$$

$$a_2(d) = \frac{1}{2} \cdot d^2 - 14 \cdot d + 100, \text{ in } [\text{FE}]/[\text{PE}]$$

Dabei gilt für die Intensität $d \in [10; 20]$.

Maximale Einsatzzeit des Produktionssystems: $T = 5[\text{ZE}]/[\text{PZE}]$

Gesucht ist diejenige Funktion, die unterschiedlichen Outputs x die jeweils minimalen Gesamtkosten zuordnet.

Zunächst werden die minimalen Stückkosten bestimmt.

Für die Funktion der Stückkosten gilt:

$$\begin{aligned}
 k(d) &= q_1 \cdot a_1(d) + q_2 \cdot a_2(d) \\
 &= \frac{[\text{GE}]}{[\text{FE}]} \cdot \frac{[\text{FE}]}{[\text{PE}]} + \frac{[\text{GE}]}{[\text{FE}]} \cdot \frac{[\text{FE}]}{[\text{PE}]} \\
 &= 10 \cdot \left(\frac{10}{1} \cdot d^2 - 4 \cdot d + 45 \right) \\
 &= 8 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot d^2 - 14 \cdot d + 100 \right) \\
 &= 5d^2 - 152d + 1250
 \end{aligned}$$

Minimierung dieser Stückkostenfunktion:

$$k'(d) = 10d - 152$$

$$10d^* - 152 = 0$$

$$d^* = \underline{\underline{15,2}}$$

$$k''(d) = 10 > 0$$

⇒ Minimum!

Wegen $d^* = 15,2 \in [10; 20]$ lauten die minimalen Stückkosten:

$$\begin{aligned}
 k(d^*) &= 5 \cdot (15,2)^2 - 152 \cdot 15,2 + 1250 \\
 &= \underline{\underline{94,8}}
 \end{aligned}$$

Die minimalen Gesamtkosten betragen:

$$K(\bar{x}) = 94,8 \cdot \bar{x}, \text{ wobei } d^* = 15,2 \text{ ist.}$$

$$\begin{array}{c}
 \uparrow \\
 \frac{[\text{PE}]}{[\text{FE}]}
 \end{array}$$

Dabei ist als Intervall der Einsatzzeit $[0; 5]$ möglich. Daher kann man als Output mit $d^* = 15,2$ nur erzeugen:

$$\begin{array}{c}
 0 \leq \bar{x} \leq 76 \\
 \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \\
 0 \frac{[\text{ZE}]}{[\text{PZE}]} \cdot 15,2 \frac{[\text{PE}]}{[\text{ZE}]} \qquad 5 \frac{[\text{ZE}]}{[\text{PZE}]} \cdot 15,2 \frac{[\text{PE}]}{\text{ZE}}
 \end{array}$$

Wenn aber $\bar{x} > 76$ hergestellt werden soll, dann muss die Intensität von 15,2 (auf bis zu 20) erhöht werden.

Beispiel: $\bar{x} = 80 \Rightarrow d = \frac{90}{5} = 16$

$\bar{x} = 90 \Rightarrow d = \frac{90}{5} = 18$

$\bar{x} = 100 \Rightarrow d = \frac{100}{5} = 20$

↑
 x_{\max}

↑
 d_{\max}

Für das Intervall $76 < \bar{x} \leq 100$ lauten die Stückkosten:

$$\begin{aligned} k\left(d = \frac{\bar{x}}{5}\right) &= 5 \cdot d^2 - 152 \cdot d + 1250 \\ &= 5 \cdot \left(\frac{\bar{x}}{5}\right)^2 - 152 \cdot \left(\frac{\bar{x}}{5}\right) + 1250 \\ &= 0,2\bar{x}^2 - 30,4\bar{x} + 1250 \end{aligned}$$

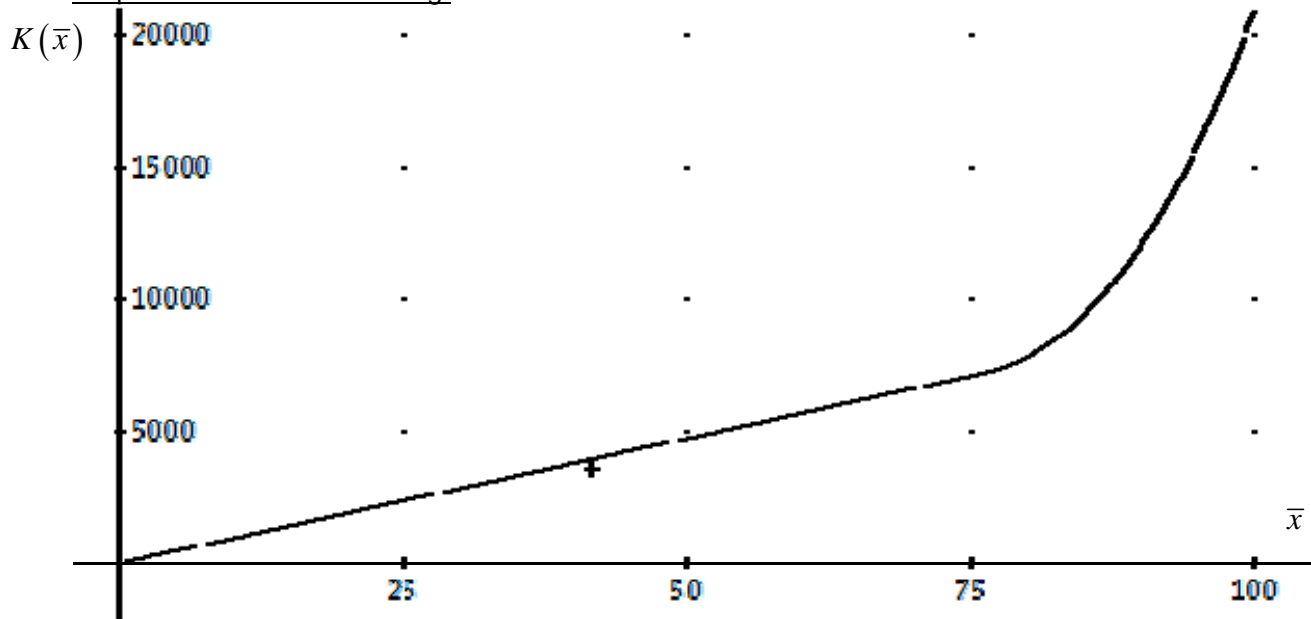
Die Gesamtkosten für $76 < \bar{x} \leq 100$ lauten:

$$\begin{aligned} K(\bar{x}) &= k\left(d = \frac{\bar{x}}{5}\right) \cdot \bar{x} \\ &= 0,2\bar{x}^3 - 30,4\bar{x}^2 + 1250\bar{x} \end{aligned}$$

Lösung:

$$K(\bar{x}) \begin{cases} 94,8 \cdot \bar{x}, & \text{wenn } 0 \leq \bar{x} \leq 76 \\ 0,2\bar{x}^3 - 30,4\bar{x}^2 + 1250\bar{x}, & \text{wenn } 76 \leq \bar{x} \leq 100 \end{cases}$$

Graphische Veranschaulichung:



6. Beschaffung von Verbrauchsfaktoren

Die Verbrauchsfaktoren umfassen die Werkstoffe (Roh-, Hilfs- und Betriebsstoffe, sowie Einzelteile) und Werkzeuge.

Im Folgenden werden die Werkstoffe (=Materialien) behandelt.

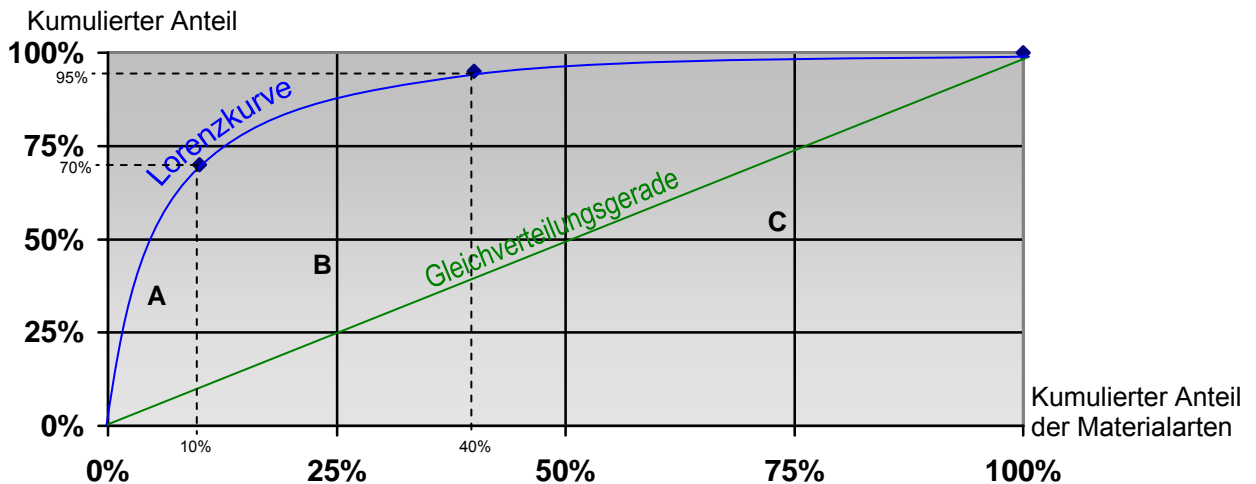
6.1. Klassifizierung von Materialien

Empirische Untersuchungen haben ergeben, dass

- (A) 5-15% der Materialarten
60-80% der Materialkosten
- (B) 20-40% der Materialarten
20-30% der Materialkosten
- (C) 50-75% der Materialarten
5-10% der Materialkosten

verursachen. Man unterscheidet daher A-, B-, C-Materialien.

Die Ungleichverteilung von Materialkosten auf Materialarten lässt sich graphisch wie folgt veranschaulichen:



Der Verlauf der Lorenzkurve bringt zum Ausdruck, wie stark die tatsächliche Verteilung von der Gleichverteilung abweicht.

Auswertung der ABC-Analyse:

Die A-Materialien verursachen hohe Materialkosten, weshalb es sich lohnt, ihren Bedarf genauer, aber auch aufwändiger zu planen. D.h., der Bedarf dieser Materialien wird abgeleitet aus dem geplanten Produktionsprogramm. Man spricht von „programmorientierten Verfahren der Materialbedarfsermittlung“. Siehe Abschnitt 6.2.1!

Die C-Materialien verursachen geringe Materialkosten, weshalb sich der Einsatz aufwändiger Verfahren zur Materialbedarfsermittlung nicht lohnt. Man setzt stattdessen einfache, ungenauere Verfahren ein, die so genannten „verbrauchsorientierten Verfahren“, d.h. man leitet den zukünftigen Materialbedarf aus den Verbräuchen der Vergangenheit ab. Siehe Abschnitt 6.2.2!

6.2 Planung des Materialbedarfs

Qualitativer Materialbedarf: erforderliche Eigenschaften der Materialien

Quantitativer Materialbedarf: erforderliche Mengen der Materialien

Zur Ermittlung des quantitativen Materialbedarfs existieren zwei Verfahrensklassen: programm- und verbrauchsorientierte Verfahren

6.2.1 Programmorientierte Verfahren

(d.h. der quantitative Materialbedarf wird aus dem zukünftigen Produktionsprogramm abgeleitet)

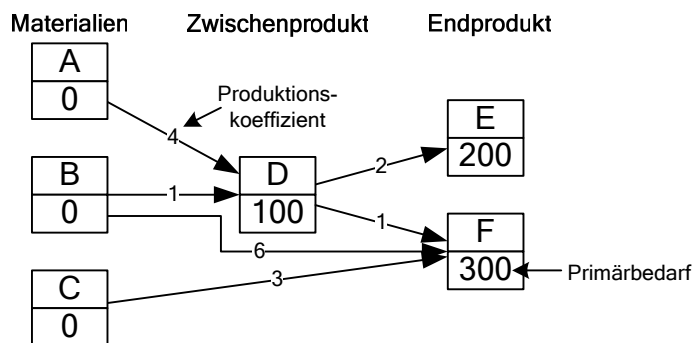
Man unterscheidet drei Arten des quantitativen Materialbedarfs:

- (1) Primärbedarf = Bedarf an Zwischen- und Endprodukten, die zum Absatz bestimmt sind.
- (2) Sekundärbedarf = Bedarf an Zwischenprodukten und Materialien, die im Unternehmen weiterverarbeitet werden
- (3) Tertiärbedarf = Bedarf an Materialien, die indirekt bei der Produktion verbraucht werden

Im Folgenden wird (1) gegeben sein, (2) ist zu ermitteln, (3) wird vernachlässigt.

Verfahren: Gozinto-Methode (basiert auf Gozintograph)

Beispiel: Aus den Materialien A, B und C werden ein Zwischenprodukt D und zwei Endprodukte E und F hergestellt.



"Gozintograph"

Lösung:

Gesamtbedarf = Primärbedarf + Sekundärbedarf

$$X_A = 0 + 4 \cdot X_D$$

$$X_B = 0 + 1 \cdot X_D + 6 \cdot X_D + 6 \cdot X_F$$

$$X_C = 0 + 3 \cdot X_F$$

$$X_D = 100 + 2 \cdot X_E + 1 \cdot X_F$$

$$X_E = 200 + 0$$

$$X_F = 300 + 0$$

Man erhält:

$$X_F = 300, X_E = 200, X_D = 100 + 2 \cdot 200 + 1 \cdot 300 = 800, X_C = 900, X_B = 2\ 600,$$

$$X_A = 3\ 200$$

6.2.2 Verbrauchsorientierte Verfahren

(d.h. der zukünftige Materialbedarf wird aus den Verbrauchsmengen der Vergangenheit abgeleitet)

- (a) **Methode der einfachen Durchschnitte** (d.h. es wird das arithmetische Mittel gebildet)

Beispiel:

t	-4	-3	-2	-1	0	1
r_t	10	25	15	30	10	20

$$\hat{r}_t = \frac{10 + 25 + 15 + 30 + 20}{5} = 20 \quad (\text{geschätzter Verbrauch in } t = 1)$$

- (b) **Methode der gleichen Durchschnitte** (d.h. in jeder Periode wird erneut das arithmetische Mittel der letzten z Verbrauchswerte gebildet)

Beispiel: $z = 5$

t	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
r_t	10	25	15	30	20	20		
		25	15	30	20	30	24	
			15	30	20	30	35	26

$$\hat{r}_1 = 20, \hat{r}_2 = 27, \hat{r}_3 = 31$$

- (c) **Methode der exponentiellen Glättung** (d.h. der geschätzte Verbrauch der Periode t ist ein gewichteter Durchschnitt aus geschätztem und tatsächlichem Verbrauch der Periode $t-1$) $\hat{r}_t = \alpha \cdot r_{t-1} + (1-\alpha) \cdot \hat{r}_{t-1}$ mit α als dimensionslosem Parameter („Glättungsparameter“). Dabei gilt: $0 \leq \alpha \leq 1$.

Beispiel: $\alpha = 0,50$, $\hat{r}_0 = 28$

$$\hat{r}_1 = \alpha \cdot r_0 + (1-\alpha) \cdot \hat{r}_0 = 0,50 \cdot 20 + 0,50 \cdot 28 = 24$$

$$\hat{r}_2 = 27$$

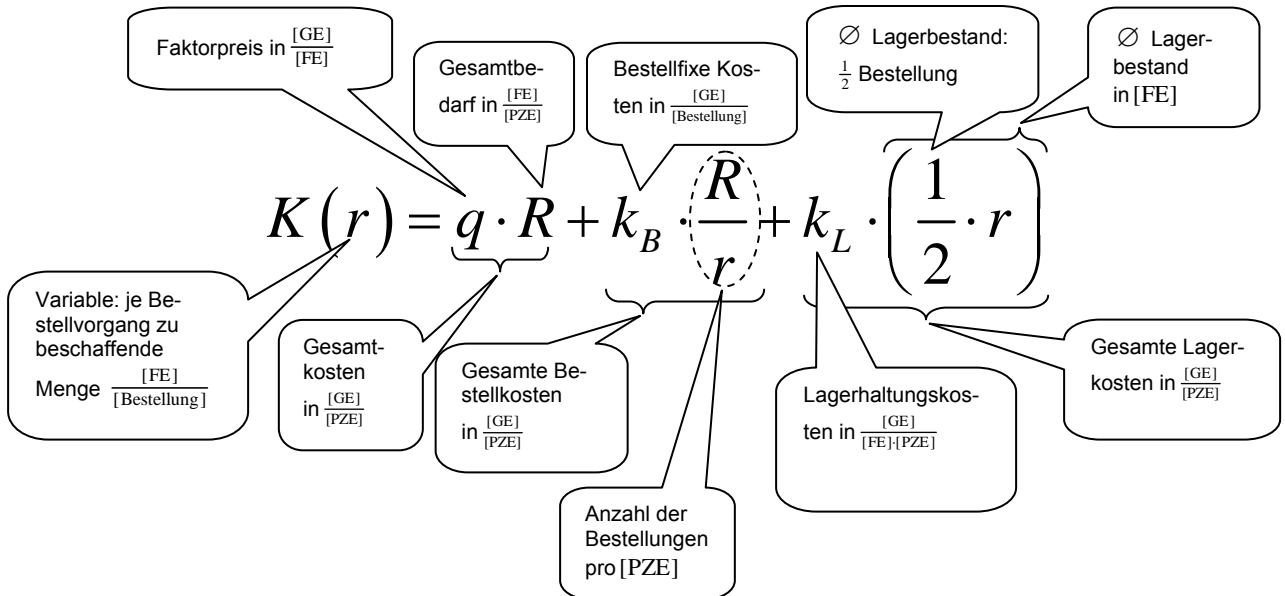
$$\hat{r}_3 = 31$$

6.3 Planung der Materialbeschaffung

Qualitative Materialbeschaffung: Beschaffungsart, d.h. Eigen- versus Fremdbearbeitung/-bezug
 Quantitative Materialbeschaffung: Beschaffungsart, d.h. es geht um die Ermittlung der „optimalen Bestellmenge“.

Problemstellung:

Wie lautet die pro Bestellvorgang zu beschaffende Menge r für eine Materialart, wenn die mit der Beschaffung verbundenen Gesamtkosten minimiert werden sollen?



Für die Funktion $K(r)$ wird das Maximum gesucht:

$$K(r) = q \cdot R + k_B \cdot \frac{R}{r} + k_L \cdot \frac{1}{2} r$$

$$K'(r) = 0 + (-1) \cdot k_B \cdot R \cdot r^{-2} + k_L \cdot \frac{1}{2}$$

$$K'(r^*) = 0 \Leftrightarrow -k_B \cdot \frac{R}{(r^*)^2} + k_L \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow k_B \cdot \frac{R}{(r^*)^2} = \frac{1}{2} k_L$$

$$\Leftrightarrow (r^*)^2 = \frac{2k_B \cdot R}{k_L}$$

$$\Leftrightarrow r^* = \sqrt{\frac{2k_B \cdot R}{k_L}}$$

$$K(r^*) = 2 \cdot k_B \cdot R \cdot \frac{1}{(r^*)^3} > 0 \Rightarrow \text{Minimum!}$$

r^* heißt „optimale Bestellmenge“ oder „wirtschaftliche Beschaffungsmenge“.

Beispiel:

$$q = 6,50 \frac{[\text{€}]}{[\text{kg}]}, R = 18\,000 \frac{[\text{kg}]}{[\text{Jahr}]}, k_B = 120 \frac{[\text{€}]}{[\text{Bestellung}]}, k_L = 0,75 \frac{[\text{€}]}{[\text{kg} \cdot \text{Jahr}]}$$

Bestimmen Sie die optimale Bestellmenge!

$$r^* = \sqrt{\frac{2 \cdot k_B \cdot R}{k_L}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 120 \cdot 18\,000}{0,75}} = \underline{\underline{2\,400}}$$

$$K(r^*) = 6,50 \cdot 18\,000 + 120 \cdot \frac{18\,000}{2\,400} + 0,75 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\,400 = \underline{\underline{118\,800}}$$

Man kann nicht 7.5mal pro Jahr bestellen! Wie oft muss man pro Jahr bestellen? Hier 8!