Mathe III.1 Übungsblatt Nr.4

Aufgabe 1: Stühle

Ein Möbelhersteller bemerkt mir Verdruss, dass die zuletzt hergestellte Serie von 122 Biedermeier-Stühlen 18 Stühle mit erheblichen Stühlen enthält, die er nicht in den Handel geben kann. Er entschließt sich, die übrigen an den Handel auszuliefern, obwohl immerhin noch 62 dieser Stühle leichte Mängel aufweisen. Ein örtliches Möbelhaus ordert 18 Biedermeier-Stühle und liefert Ihnen – auf Ihre Bestellung hin – 4 davon ins Haus.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit *p* sind diese Stühle mängelfrei?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit *q* sind alle mangelhaft?

Lösung:
Es spielt insgesamt überhaupt keine Rolle, dass diese 4 Stühle die ich bestellt hab, vorher einen Umweg über den Zwischenhändler gemacht haben, da keine Aussage darüber getroffen wurde, bei denen irgendwelche Einschränkung über die Defektheit der Stühle gemacht wurden. Daher ergeben sich folgende Wahrscheinlichkeiten:

a) $$p = HyG(122-18,62,4)_0 = \frac{\binom{62}{0}\binom{42}{4}}{\binom{104}{4}}$$

b) $$q = HyG(122-18,62,4)_4 = \frac{\binom{62}{4}\binom{42}{0}}{\binom{104}{4}}$$

Aufgabe 2: Fidele Seele

Der Discounter „Fidel“ bietet unter dem Markennamen „Fidele Seele“ einen Rotwein an, der aus vier Weingütern angeliefert wird, wobei Gut I 20%, Gut II 13%, Gut III 45% und Gut IV 22% aller Lieferungen entfallen. Man weiß, dass im Mittel 3% der aus Gut I, 8% der aus Gut II, 1% der aus Gut III und 5% der aus Gut IV stammenden Weine verdorben sin.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die von Ihnen gekaufte Flasche zu beanstanden?
   a. [ ] 0,0324
   b. [ ] 0,137
   c. [ ] 3/64
   d. [x] 0.0319
   e. [ ] 1/32
   f. [ ] „weiß nicht“

b) Sie verkosten die von Ihnen gekaufte Flasche und sind zu frieden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt die Flasche weder aus Gut I noch aus Gut III?
   a. [ ] 0,3291
   b. [x] 0,3394
   c. [ ] 1/7
   d. [ ] 0,691
   e. [ ] 1/34
   f. [ ] „weiß nicht“

Lösung:
Aus der Aufgabenstellung lassen sich direkt folgende Wahrscheinlichkeiten auslesen:
V = Flasche ist verdorben
G_i = Flasche stammt von Gut i
$P(G_I) = 0.2 \wedge P(G_{II}) = 0.13 \wedge P(G_{III}) = 0.45 \wedge P(G_{IV}) = 0.22$
$P(V \mid G_I) = 0.03 \wedge P(V \mid G_{II}) = 0.08 \wedge P(V \mid G_{III}) = 0.01 \wedge P(V \mid G_{IV}) = 0.05$

a) Die Wir haben sämtliche bedingten Wahrscheinlichkeiten, über den Zustand mit der Vorraussetzung der Herkunft gegeben.

$$\Rightarrow P(V) = \bigcup_{i=I}^{IV} P(V \cap G_i) \Leftrightarrow P(V) = \sum_{i=I}^{IV} P(V \mid G_i) * P(G_i)$$

$$\Leftrightarrow P(V) = P(V \mid G_I) * P(G_I) + P(V \mid G_{II}) * P(G_{II}) + P(V \mid G_{III}) * P(G_{III}) + P(V \mid G_{IV}) * P(G_{IV})$$

$$\Leftrightarrow P(V) = 0.03 * 0.2 + 0.08 + 0.13 + 0.01 * 0.45 + 0.05 * 0.22 \approx 0.0319$$

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass die Flasche weder von Gut I noch aus Gut III kommt, unter der Vorraussetzung das diese verdorben ist, ist äquivalent zu der Wahrscheinlichkeit, dass die Flasche von Gut II oder Gut IV kommt, unter der Vorraussetzung das sie verdorben ist. $\Rightarrow P\left(\overline{G_I \cap G_{III}} \mid \overline{V}\right) \Leftrightarrow P\left(G_{II} \cup G_{IV} \mid \overline{V}\right)$

$$\Rightarrow P(\overline{V}) = 1 - P(V) \wedge P\left(G_{II} \cup G_{IV} \mid \overline{V}\right) = \frac{P\left((G_{II} \cup G_{IV}) \cap \overline{V}\right)}{P(\overline{V})} \Leftrightarrow \frac{P\left((G_{II} \cap \overline{V}) \cup (G_{IV} \cap \overline{V})\right)}{P(\overline{V})}$$

$$\Leftrightarrow \frac{P(G_{II} \cap \overline{V}) + P(G_{IV} \cap \overline{V})}{P(\overline{V})} \Leftrightarrow \frac{P(\overline{V} \mid G_{II}) * P(G_{II}) + P(\overline{V} \mid G_{IV}) * P(G_{IV})}{P(\overline{V})}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1 - P(V \mid G_{II})) * P(G_{II}) + (1 - P(V \mid G_{IV})) * P(G_{IV})}{P(\overline{V})} \Leftrightarrow \frac{(1 - 0.08) * 0.13 + (1 - 0.05) * 0.22}{0.9681}$$

$$\approx 0.3394$$

Aufgabe 3: PKW-Unfälle II

Die Analyse von PKW-Unfällen eines Jahres ergab, dass Dunkelheit und Alkoholgenuss beträchtliche Auswirkungen auf das Unfallrisiko haben. So war in 28% aller Unfälle Alkohol im Spiel. Das Risiko eines Unfalls beträgt dagegen nur 2%, wenn die Fahrt tagsüber und mit 0% Alkohol unternommen wird. (Der Anteil derartiger Fahrten an der Gesamtheit aller Fahrten wird auf 68% geschätzt.) 0,2% aller Fahrten wurden mit klarem Kopf bei Dunkelheit unternommen und endeten dennoch mit einem Unfall. Wie groß ist das Unfallrisiko schlechthin?

Lösung:
Beim Lösen dieser Aufgabe besteht die Schwierigkeit darin, die Mengentheoretisch korrekten Wahrscheinlichkeiten aus dem Text heraus zu lesen:

A = Fahrt mit Alkohol am Steuer	$\overline{A}$ = Fahrt nüchtern
D = Fahrt nachts	$\overline{D}$ = Fahrt tagsüber
U = Unfall	$\overline{U}$ = kein Unfall

Gegeben:

$$P(A \mid U) = 0.28$$
$$P(U \mid \overline{D} \cap \overline{A}) = 0.02$$
$$P(\overline{D} \cap \overline{A}) = 0.68$$
$$P(D \cap \overline{A} \cap U) = 0.002$$

$$\Rightarrow P(U) = P(U \cap A) + P(U \cap \overline{A}) \Leftrightarrow P(U \cap A) + P(U \cap \overline{A} \cap D) + P(U \cap \overline{A} \cap \overline{D})$$
$$\Leftrightarrow P(U) = P(U \cap A) + P(U \cap \overline{A} \cap D) + P(U \mid \overline{A} \cap \overline{D}) * P(\overline{A} \cap \overline{D})$$
$$\Leftrightarrow P(U) = P(A \mid U) * P(U) + P(U \cap \overline{A} \cap D) + P(U \mid \overline{A} \cap \overline{D}) * P(\overline{A} \cap \overline{D})$$
$$\Leftrightarrow P(U) - P(A \mid U) * P(U) = P(U \cap \overline{A} \cap D) + P(U \mid \overline{A} \cap \overline{D}) * P(\overline{A} \cap \overline{D})$$
$$\Leftrightarrow P(U) * (1 - P(A \mid U)) = P(U \cap \overline{A} \cap D) + P(U \mid \overline{A} \cap \overline{D}) * P(\overline{A} \cap \overline{D})$$
$$\Leftrightarrow P(U) = \frac{P(U \cap \overline{A} \cap D) + P(U \mid \overline{A} \cap \overline{D}) * P(\overline{A} \cap \overline{D})}{(1 - P(A \mid U))}$$
$$\Leftrightarrow P(U) = \frac{0.002 + 0.02 * 0.68}{1 - 0.28}$$

Aufgabe 4: Qualitätskontrolle

Um die Qualität von Werkstücken zu prüfen, werden aus einem Los von 10 Werkstücken 3 Werkstücke entnommen. Ist höchstens 1 davon fehlerhaft, wird das Los akzeptiert; sind 3 fehlerhaft, wird das Los zurückgewiesen. Werden dagegen 2 fehlerhafte Stücke entdeckt, wird eine zweite Qualitätskontrolle nachgeschaltet. Zu diesem Zweck werden von den 7 verbliebenen Stücken des Loses weitere 2 aus Geratewohl entnommen. Ist kein fehlerhaftes Stück darunter, wird das Los akzeptiert, andernfalls zurückgewiesen. Das Los enthalte 5 fehlerhafte Stücke.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit *p* wird das Los zurückgewiesen?
b) Das Los wird zurückgewiesen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit *q* erfolgt die Zurückweisung in der 2. Stufe der Qualitätskontrolle?

Lösung:
Z := Das Los wird zurückgewiesen (=1) oder nicht (=0)
Z_i := Das los wird in der i-ten Stufe zurückgewiesen (=1) oder nicht (=0) oder es kommt in die nächste Stufe(=2).

a) $\Rightarrow p = P(Z=1) = P(Z_1=1) + P(Z_1=2, Z_2=1)$

$$P(Z_1=1) = \frac{\binom{5}{3}\binom{5}{0}}{\binom{10}{3}} \wedge P(Z_1=0) = \frac{\binom{5}{3}\binom{5}{0}}{\binom{10}{3}} \wedge P(Z_1=2) = \frac{\binom{5}{2}\binom{5}{1}}{\binom{10}{3}}$$

$$\Rightarrow P(Z_2=1, Z_1=2) = P(Z_1=2) * P(Z_2=1) = \frac{\binom{5}{2}\binom{5}{1}}{\binom{10}{3}} * \left(\frac{\binom{3}{1}\binom{4}{1}}{\binom{7}{2}} + \frac{\binom{3}{2}\binom{4}{0}}{\binom{7}{2}}\right)$$

$$\Rightarrow P(Z=1) = P(Z_1=1) + P(Z_1=2, Z_2=1) = \frac{\binom{5}{3}\binom{5}{0}}{\binom{10}{3}} + \frac{\binom{5}{2}\binom{5}{1}}{\binom{10}{3}} * \left(\frac{\binom{3}{1}\binom{4}{1}}{\binom{7}{2}} + \frac{\binom{3}{2}\binom{4}{0}}{\binom{7}{2}}\right)$$

b) Gesucht ist nach :

$$q = P(Z_1 = 2 \mid Z) \Leftrightarrow \frac{P(Z \cap Z_1 = 2)}{P(Z)}$$

$$\Rightarrow \frac{P(Z_1=2, Z_2=0) + P(Z_1=2, Z_2=1)}{P(Z)} \Rightarrow \frac{\left(\frac{\binom{5}{2}\binom{5}{1}}{\binom{10}{3}}\right) * \left(\frac{\binom{3}{1}\binom{4}{1}}{\binom{7}{2}} + \frac{\binom{3}{2}\binom{4}{0}}{\binom{7}{2}}\right)}{\left(\frac{\binom{5}{3}\binom{5}{0}}{\binom{10}{3}} + \frac{\binom{5}{2}\binom{5}{1}}{\binom{10}{3}} * \left(\frac{\binom{3}{1}\binom{4}{1}}{\binom{7}{2}} + \frac{\binom{3}{2}\binom{4}{0}}{\binom{7}{2}}\right)\right)}$$